Planche n° 31. Géométrie en dimension 3

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (T)** Dans E_3 rapporté à un repère (O, i, j, k), on donne les points $A(1, 2, -1)$, $B(3, 2, 0)$, $C(2, 1, -1)$ et $D(1, 0, 4)$. Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

n° 2 : (T)** Dans E_3 rapporté à un repère (O, i, j, k), on donne :

la droite (D) dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{array}\right.$,

le plan P dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right.$,

le plan P' dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{l} x = -5 - \nu \\ y = 3 + \nu + 3\eta \\ z = \nu + \eta \end{array}\right.$,

Etudier $D \cap P$ et $P \cap P'$

n° 3 : (T)** Matrice dans la base canonique orthonormée directe de la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ autour de $(1, 2, 2)$ qui transforme j en k.

n° 4 : (T)** Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel euclidien orienté rapporté à la base orthonormée directe (i, j, k), déterminer l'image du plan d'équation $x + y = 0$ par **1)** la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - y + z = 0$, **2)** la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $(1, 1, 1)$, **3)** par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ autour du vecteur $(1, 1, 1)$.

n° 5 : (*T) Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer un repère de la droite (D) $\left\{\begin{array}{l} x - y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{array}\right.$.

n° 6 : (*T) Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'intersection de (D) $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 7 \end{array}\right.$ et $(P) : x + 3y - 5z + 2 = 0$.

n° 7 : (**) Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer le réel a pour que les droites $\left\{\begin{array}{l} x + 2 = -2z \\ y = 3x + z \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = a \end{array}\right.$ soient coplanaires, puis déterminer une équation du plan les contenant.

n° 8 : (T)** Dans $\mathbb{R}^3$, équation du plan P parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$.

n° 9 : (T)** Dans $\mathbb{R}^3$, soient (D) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{array}\right.$ et $(\Delta) : 6x = 2y = 3z$ puis $(P) : x + 3y + 2z = 6$. Déterminer la projection de (D) sur (P) parallèlement à (Δ).

n° 10 : (**) Dans $\mathbb{R}^3$, soient (D) $\left\{\begin{array}{l} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right.$ et (D') $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{array}\right.$.
Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

n° 11 : (**) Système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) parallèle à la droite $(D) : 2x = 3y = 6z$ et sécante aux droites $(D_1) : x = z - 4 = 0$ et $(D_2) : y = z + 4 = 0$.

n° 12 : (***) Trouver toutes les droites sécantes aux quatre droites (D_1) $x - 1 = y = 0$, $(D_2) : y - 1 = z = 0$, $(D_3) : z - 1 = x = 0$ et $(D_4) : x = y = -6z$.

n° 13 : (T)** Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2, -2, 0)$, $B(4, 2, 6)$ et $C(-1, -3, 0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A, B, C).

n° 14 : (T)** Soit $M(x, y, z)$ un point de $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la distance de M à la droite $(D)\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right.$. En déduire une équation du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

n° 15 : (T)** Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé, soient $(D)\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right.$ et $(D')\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{array}\right.$. Déterminer la distance de (D) à (D') puis la perpendiculaire commune à ces deux droites.

n° 16 : (**) Montrer que les plans $(P_1) : z-2y=5$, $(P_2) : 2x-3z=0$ et $(P_3) : 3y-x=0$ admettent une parallèle commune. Ils définissent ainsi un prisme. Déterminer l'aire d'une section perpendiculaire.

n° 17 : (*T) Angle des plans $x+2y+2z=3$ et $x+y=0$.

n° 18 : (T)** Soient $(P_1) : 4x+4y-7z-1=0$ et $(P_2) : 8x-4y+z+7=0$. Trouver une équation cartésienne des plans bissecteurs de (P_1) et (P_2).

n° 19 : (T)** Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (D) et (D') : $(D)\left\{\begin{array}{l} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{array}\right.$ et $(D')\left\{\begin{array}{l} x=z-1 \\ y=z-1 \end{array}\right.$.

n° 20 : (**) Soient (D) la droite dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{array}\right.$ et (P) le plan d'équation cartésienne $x+3y+2z=6$. Déterminer la projetée (orthogonale) de (D) sur (P).

n° 21 : (I)** Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

n° 22 : (T)** Déterminer la distance de l'origine O à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{array}\right.$.

