

# Planche n° 31. Géométrie en dimension 3. Corrigé

**n° 1.** •  $\vec{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$  a pour coordonnées  $(2, -3, -4)$ . Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, A et B ne sont pas alignés et le plan (OAB) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal  $\vec{n}(2, -3, -4)$ . Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc  $2x - 3y - 4z = 0$ .

•  $\vec{n}' = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$  a pour coordonnées  $(4, -9, -1)$ . Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, C et D ne sont pas alignés et le plan (OCD) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal  $\vec{n}'(4, -9, -1)$ . Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc  $4x - 9y - z = 0$ .

•  $-\vec{n} \wedge \vec{n}'$  a pour coordonnées  $(33, 14, 6)$ . Ce vecteur n'est pas nul et on sait que les plans (OAB) et (OCD) sont sécants en une droite, à savoir la droite passant par O(0, 0, 0) et de vecteur directeur  $(33, 14, 6)$ . Un système d'équations cartésiennes de cette droite est  $\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 0 \\ 4x - 9y - z = 0 \end{cases}$ .

**n° 2.** Les vecteurs  $(2, -3, 1)$  et  $(1, 2, 0)$  ne sont pas colinéaires, de sorte que (P) est bien un plan. Trouvons alors une équation cartésienne de (P)

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P) &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda = z - 1 \\ x = 1 + 2(z - 1) + \mu \\ y = -1 - 3(z - 1) + 2\mu \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda = z - 1 \\ \mu = x - 2z + 1 \\ y = -1 - 3(z - 1) + 2(x - 2z + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -2x + y + 7z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Soit alors  $M(2 + 3t, -t, 1 + t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de (D)

$$M \in (P) \Leftrightarrow -2(2 + 3t) + (-t) + 7(1 + t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 \times t - 1 = 0.$$

Ce dernier système n'a pas de solution et donc  $(D) \cap (P) = \emptyset$ . La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P) \cap (P') &\Leftrightarrow \exists(\nu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = -5 - \nu \\ y = 3 + \nu + 3\eta \\ z = \nu + \eta \\ -2x + y + 7z - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\nu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = -5 - \nu \\ y = 3 + \nu + 3\eta \\ z = \nu + \eta \\ -2(-5 - \nu) + (3 + \nu + 3\eta) + 7(\nu + \eta) - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\nu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \eta = -\nu - \frac{9}{10} \\ x = -5 - \nu \\ y = 3 + \nu + 3\left(-\nu - \frac{9}{10}\right) \\ z = \nu + \left(-\nu - \frac{9}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \exists\nu \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -\nu - 5 \\ y = -2\nu + \frac{3}{10} \\ z = -\frac{9}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

(P) et (P') sont donc sécants en la droite passant par le point  $\left(-5, \frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right)$  et de vecteur directeur  $(1, 2, 0)$ .

**n° 3.** Soit r la rotation cherchée. Notons u le vecteur  $\frac{1}{3}(1, 2, 2)$  (u est unitaire) et  $\theta$  l'angle de r. r est la rotation d'angle  $\theta$  autour du vecteur unitaire u. On sait que pour tout vecteur v de  $\mathbb{R}^3$

$$r(v) = (\cos \theta)v + (1 - \cos \theta)(v \cdot u)u + (\sin \theta)u \wedge v \quad (*)$$

et en particulier que  $[v, r(v), u] = \sin \theta \|v \wedge u\|^2$ . L'égalité  $r(j) = k$  fournit

$$\sin \theta \|j \wedge u\|^2 = [j, r(j), u] = [u, j, k] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Comme  $u \wedge j = \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) \wedge j = -\frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$ , on a  $\|j \wedge u\|^2 = \frac{5}{9}$  et donc  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ . L'égalité  $r(j) = k$  fournit ensuite

$$k = (\cos \theta)j + (1 - \cos \theta) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) \wedge j$$

En analysant la composante en  $i$ , on en déduit que  $\frac{2}{9}(1 - \cos \theta) - \frac{2}{5} = 0$  et donc  $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ . Ainsi, pour tout vecteur  $v = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , l'égalité (\*) s'écrit

$$\begin{aligned} r(v) &= -\frac{4}{5}(x, y, z) + \frac{9}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(x + 2y + 2z)(1, 2, 2) + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}(2z - 2y, 2x - z, -2x + y) \\ &= \frac{1}{5}(-4x + (x + 2y + 2z) + (2z - 2y), -4y + 2(x + 2y + 2z) + (2x - z), -4z + 2(x + 2y + 2z) + (-2x + y)) \\ &= \frac{1}{5}(-3x + 4z, 4x + 3z, 5y) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**n° 4.** Notons  $P$  le plan d'équation  $x + y = 0$  dans la base  $\mathcal{B} = (i, j, k)$ .  $P$  est le plan de vecteur normal  $n = i + j$ .

1) Soit  $s$  la symétrie orthogonale par rapport au plan  $P'$  d'équation  $x - y + z = 0$ .  $s(P)$  est le plan de vecteur normal  $s(n)$ . Or, le vecteur  $n$  est dans  $P'$  et donc  $s(n) = n$  puis  $s(P) = P$ .

$s(P)$  est le plan  $P$ .

2) Notons  $\sigma$  la symétrie orthogonale par rapport au vecteur  $u = (1, 1, 1)$ .  $\sigma(P)$  est le plan de vecteur normal

$$\sigma(n) = 2 \frac{n \cdot u}{\|u\|^2} u - n = 2 \frac{2}{3}(1, 1, 1) - (1, 1, 0) = \frac{1}{3}(1, 1, 4).$$

$\sigma(P)$  est le plan d'équation  $x + y + 4z = 0$ .

3) Notons  $r$  la rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  autour du vecteur unitaire  $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ .  $r(P)$  est le plan de vecteur normal

$$\begin{aligned} r(n) &= \left(\cos \frac{\pi}{4}\right) n + \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) (n \cdot u)u + \left(\sin \frac{\pi}{4}\right) u \wedge n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{2}{3}(1, 1, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 0) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3 + 2(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{3}, 3 + 2(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{3}, 2(\sqrt{2} - 1)) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}, 2(\sqrt{2} - 1)). \end{aligned}$$

$r(P)$  est le plan d'équation  $(1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3})x + (1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})y + 2(\sqrt{2} - 1)z = 0$ .

n° 5. Puisque  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$ , on choisit d'exprimer  $x$  et  $z$  en fonction de  $y$ .

Soit  $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . D'après les formules de CRAMER, on a

$$\begin{aligned} M \in (D) &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = y - 7 \\ -2x - 3z = 2y - 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} y - 7 & 2 \\ 2y - 5 & -3 \end{vmatrix} \text{ et } z = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & y - 7 \\ -2 & 2y - 5 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 31 - 7y \\ z = -19 + 4y \end{cases} \end{aligned}$$

(D) est la droite passant par  $A(31, 0, -19)$  dirigée par le vecteur  $u(-7, 1, 4)$ .

n° 6. Soit  $M(2 + \lambda, 3 - \lambda, 7)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , un point quelconque de (D).

$$M \in (P) \Leftrightarrow (2 + \lambda) + 3(3 - \lambda) - 5 \times 7 + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 12.$$

(P)  $\cap$  (D) est donc un singleton. Pour  $\lambda = 12$ , on obtient les coordonnées du point d'intersection

$$(P) \cap (D) = \{(14, -9, 7)\}.$$

n° 7. • Repère de (D).

$$\begin{cases} x + 2 = -2z \\ y = 3x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2z \\ y = 3(-2 - 2z) + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2z \\ y = -6 - 5z \end{cases}$$

(D) est la droite passant par  $A(0, -1, -1)$  et dirigée par  $u(2, 5, -1)$ .

• Repère de (D').

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = z - 1 \\ 2x + y = z + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + a - 1 \\ y = 2 - a - 3z \end{cases}$$

(D') est la droite passant par  $A'(a - 1, 2 - a, 0)$  et dirigée par  $u'(2, -3, 1)$ .

• Déjà  $u$  et  $u'$  ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') sont ou bien sécantes en un point et dans ce cas coplanaires ou bien non coplanaires.

• Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère  $(A, u, u')$ . Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ y + 1 & 5 & -3 \\ z + 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4(y + 1) - 16(z + 1) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 8z = -10.$$

• Enfin, (D) et (D') sont coplanaires si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ coplanaires} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow -(a - 1) + 2(2 - a) = -10 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

(D) et (D') sont coplanaires si et seulement si  $a = \frac{5}{3}$  et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est  $-x + 2y + 8z = -10$ .

n° 8. Puisque P parallèle à la droite (Oy), le vecteur  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  est dans  $\vec{P}$ . De même, le vecteur  $\vec{AB} = (-1, 3, 1)$  est dans  $\vec{P}$ .

P est donc nécessairement le plan passant par  $A(0, -1, 2)$  et de vecteur normal  $\vec{j} \wedge \vec{AB} = (1, 0, 1)$ . Réciproquement, ce plan convient.

Une équation de P est donc  $(x - 0) + (z - 2) = 0$  ou encore  $x + z = 2$ .

Une équation du plan parallèle à la droite (Oy) et passant par  $A(0, -1, 2)$  et  $B(-1, 2, 3)$  est  $x + z = 2$ .

**n° 9** Notons  $p$  la projection sur  $(P)$  parallèlement à  $(\Delta)$ .

- Déterminons un repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x + 1 \\ 2y + z = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x + 2 \end{cases}$$

$(D)$  est la droite de repère  $(A, \vec{u})$  où  $A(0, -1, 2)$  et  $\vec{u}(1, 2, -3)$ .

- $(\Delta)$  est dirigée par le vecteur  $\vec{u}'(1, 3, 2)$ .  $\vec{u}$  n'est pas colinéaire à  $\vec{u}'$  et donc  $(D)$  n'est pas parallèle à  $(\Delta)$ . On en déduit que  $p(D)$  est une droite.

Plus précisément,  $p(D)$  est la droite intersection du plan  $(P)$  et du plan  $(P')$  contenant  $(D)$  et parallèle à  $(\Delta)$ . Déterminons une équation de  $(P')$ . Un repère de  $(P')$  est  $(A, \vec{u}, \vec{u}')$ . Donc

$$M(x, y, z) \in (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y + 1 & 2 & 3 \\ z - 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 5(y + 1) + (z - 2) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

Finalement

$$p(D) \text{ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est } \begin{cases} 13x - 5y + z = 7 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

**n° 10** • Repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + z \\ y = -1 - 3z \end{cases}$$

$(D)$  est la droite passant par  $A(a, -1, 0)$  et dirigée par  $u(1, -3, 1)$ .

- Repère de  $(D')$ .

$$\begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + z = 2b - x \\ 3y + 2z = 7 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4b - 7 + x \\ z = 14 - 6b - 3x \end{cases}$$

$(D')$  est la droite passant par  $A'(0, 4b - 7, -6b + 14)$  et dirigée par  $u'(1, 1, -3)$ .

- Les vecteurs  $u$  et  $u'$  ne sont pas colinéaires et donc  $(D)$  et  $(D')$  ne sont pas parallèles.
- Le plan  $(P)$  contenant  $(D)$  et parallèle à  $(D')$  est le plan de repère  $(A, u, u')$ . Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - a & 1 & 1 \\ y + 1 & -3 & 1 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8(x - a) + 4(y + 1) + 4z = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z = 2a - 1.$$

- Enfin,  $(D)$  et  $(D')$  sont sécantes si et seulement si  $(D')$  est contenue dans  $(P)$ . Comme  $(D')$  est déjà parallèle à  $(P)$ , on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ sécantes} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow (4b - 7) + (-6b + 14) = 2a - 1 \Leftrightarrow b = -a + 4.$$

$$(D) \text{ et } (D') \text{ sont sécantes si et seulement si } b = -a + 4 \text{ et dans ce cas, une équation du plan contenant } (D) \text{ et } (D') \text{ est } 2x + y + z = 2a - 1.$$

**n° 11** •  $(\Delta)$  est parallèle à  $(D)$  si et seulement si  $(\Delta)$  est dirigée par le vecteur  $u(3, 2, 1)$  ou encore  $(\Delta)$  admet un système

d'équations paramétriques de la forme  $\begin{cases} x = a + 3\lambda \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + \lambda \end{cases}$ . Ensuite,  $(\Delta)$  est sécante à  $(D_1)$  si et seulement si on peut choisir

le point  $(a, b, c)$  sur  $(D_1)$  ou encore si et seulement si  $(\Delta)$  admet un système d'équations paramétriques de la forme

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = b + 2\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

Enfin,

$$(\Delta) \text{ et } (D_2) \text{ sécantes} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / b + 2\lambda = 4 + \lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow b + 2 \times (-8) = 0 \Leftrightarrow b = 16.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de  $(\Delta)$  : un système d'équations paramétriques de  $(\delta)$  est  $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 16 + 2\lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ . Un

système d'équations cartésiennes de  $(\Delta)$  est  $\begin{cases} x = 3(z - 4) \\ y = 16 + 2(z - 4) \end{cases}$  ou encore

$$(\Delta) : \begin{cases} x - 3z + 12 = 0 \\ y - 2z - 8 = 0 \end{cases}.$$

**n° 12** Notons  $(\Delta)$  une éventuelle droite solution.

•  $(\Delta)$  est sécante à  $(D_1)$  et  $(D_2)$  si et seulement si  $(\Delta)$  passe par un point de la forme  $(1, 0, a)$  et par un point de la forme  $(b, 1, 0)$  ou encore si et seulement si  $(\Delta)$  passe par un point de la forme  $(1, 0, a)$  et est dirigée par un vecteur de la forme  $(b - 1, 1, -a)$ .

Ainsi,  $(\Delta)$  est sécante à  $(D_1)$  et  $(D_2)$  si et seulement si  $(\Delta)$  admet un système d'équations paramétriques de la forme

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda(b - 1) \\ y = \lambda \\ z = a - \lambda a \end{cases} \quad \text{ou encore un système d'équations cartésiennes de la forme } \begin{cases} x - (b - 1)y = 1 \\ ay + z = a \end{cases}.$$

• Ensuite,  $(\Delta)$  et  $(D_3)$  sécantes  $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} / \begin{cases} -(b - 1)y = 1 \\ ay + 1 = a \end{cases} \Leftrightarrow b \neq 1 \text{ et } -\frac{a}{b - 1} + 1 = a \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } a = 1 - \frac{1}{b}$ .

En résumé, les droites sécantes à  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  sont les droites dont un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} x - (b - 1)y = 1 \\ \left(1 - \frac{1}{b}\right)y + z = 1 - \frac{1}{b} \end{cases}, b \notin \{0, 1\}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} (\Delta) \text{ et } (D) \text{ sécantes} &\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x - (b - 1)y = 1 \\ \left(1 - \frac{1}{b}\right)y + z = 1 - \frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -6z + 6(b - 1)z = 1 \\ -6\left(1 - \frac{1}{b}\right)z + z = 1 - \frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } -6\left(1 - \frac{1}{b}\right)\frac{1}{6(b - 2)} + \frac{1}{6(b - 2)} = 1 - \frac{1}{b} \\ &\Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } -6(b - 1) + b = 6(b - 1)(b - 2) \Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } 6b^2 - 13b + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow b \in \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Les droites solutions sont } (\Delta_1) : \begin{cases} 3x + y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \text{ et } (\Delta_2) : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}.$$

**n° 13** • Déterminons le centre de gravité  $G$ .

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}(2, -2, 0) + \frac{1}{3}(4, 2, 6) + \frac{1}{3}(-1, -3, 0) = \left(\frac{5}{3}, -1, 2\right).$$

• Déterminons le centre du cercle circonscrit  $O$ . Une équation du plan  $(ABC)$  est  $\begin{vmatrix} x - 2 & 2 & -3 \\ y + 2 & 4 & -1 \\ z & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$  ou encore

$6(x - 2) - 18(y + 2) + 10z = 0$  ou enfin  $3x - 9y + 5z = 24$ . Posons alors  $O(a, b, c)$ .

Ensuite,  $OA = OB \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b + 2)^2 + c^2 = (a - 4)^2 + (b - 2)^2 + (c - 6)^2 \Leftrightarrow 4a + 8b + 12c = 48 \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 16$  et

$OA = OC \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b + 2)^2 + c^2 = (a + 1)^2 + (b + 3)^2 + c^2 \Leftrightarrow -6a - 2b = 2 \Leftrightarrow 3a + b = -1$ .

D'où le système

$$\begin{cases} 3a - 9b + 5c = 24 \\ a + 2b + 3c = 16 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 3a - 9(-3a - 1) + 5c = 24 \\ a + 2(-3a - 1) + 3c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 6a + c = 3 \\ -5a + 3c = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ c = 3 - 6a \\ -5a + 3(3 - 6a) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{23} \\ b = \frac{4}{23} \\ c = \frac{123}{23} \end{cases}$$

Donc  $O\left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right)$ .

- Déterminons l'orthocentre H. D'après la relation d'EULER,

$$H = O + 3\overrightarrow{OG} = \left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right) + 3\left(-\frac{9}{23} - \frac{5}{3}, \frac{4}{23} + 1, \frac{123}{23} - 2\right) = \left(\frac{-151}{23}, \frac{85}{23}, \frac{354}{23}\right).$$

- Déterminons le centre du cercle inscrit I. On sait que  $I = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$  où  $a = BC = \sqrt{5^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{86}$ ,  $b = AC = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}$  et  $c = AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{54}$ . Donc

$$I = \frac{\sqrt{86}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}A + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}B + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}C$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{86} + 4\sqrt{10} - \sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}, \frac{-2\sqrt{86} + 2\sqrt{10} - 3\sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}, \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}\right).$$

Dans  $\mathbb{R}^3$  euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne  $A(2, -2, 0)$ ,  $B(4, 2, 6)$  et  $C(-1, -3, 0)$ . Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle  $(A, B, C)$ .

$$G\left(\frac{5}{3}, -1, 2\right), O\left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right) \text{ et } H\left(\frac{-151}{23}, \frac{85}{23}, \frac{354}{23}\right) \text{ puis}$$

$$I\left(\frac{2\sqrt{86} + 4\sqrt{10} - \sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}, \frac{-2\sqrt{86} + 2\sqrt{10} - 3\sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}, \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}\right).$$

- n° 14** • Déterminons un repère de (D).

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + 5z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 - z \\ 2x + y = 2 - 5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 4z \\ y = -4 + 3z \end{cases}.$$

Un repère de (D) est  $(A, \vec{u})$  où  $A(3, -4, 0)$  et  $\vec{u}(-4, 3, 1)$ .

- Soit  $M(x, y, z)$  un point du plan. On sait que

$$d(A, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{(y - 3z + 4)^2 + (x + 4z - 3)^2 + (3x + 4y + 7)^2}}{\sqrt{26}}$$

- Notons  $\mathcal{C}$  le cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow d(A, (D)) = 2 \Leftrightarrow (y - 3z + 4)^2 + (x + 4z - 3)^2 + (3x + 4y + 7)^2 = 104$$

Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2 est  $(y - 3z + 4)^2 + (x + 4z - 3)^2 + (3x + 4y + 7)^2 = 104$ .

n° 15 • Déterminons un repère de (D).

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + 5z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z - 1 \\ 2x + y = -5z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4z + 3 \\ y = 3z - 4 \end{cases}$$

Un repère de (D) est  $(A, \vec{u})$  où  $A(3, -4, 0)$  et  $\vec{u}(-4, 3, 1)$ .

• Déterminons un repère de (D').

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - 5z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z + 2 \\ 2x + y = 5z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6z + 1 \\ y = -7z + 1 \end{cases}$$

Un repère de (D') est  $(A', \vec{u}')$  où  $A'(1, 1, 0)$  et  $\vec{u}'(6, -7, 1)$ .

•  $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ .

Puisque  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D').

• On sait que la distance d de (D) à (D') est donnée par

$$d = \frac{\text{abs}([\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}'])}{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|},$$

avec  $[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}'] = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \times (-2) + 10 \times 5 = 30$  et donc  $d = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ .

$$d((D), (D')) = \sqrt{3}.$$

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est  $\begin{cases} [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \\ [\overrightarrow{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \end{cases}$ . Or,

$$\frac{1}{10} [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x-3 & -4 & 1 \\ y+4 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-3) + 5(y+4) - 7z = 2x + 5y - 7z + 14,$$

et

$$\frac{1}{10} [\overrightarrow{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x-1 & 6 & 1 \\ y-1 & -7 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8(x-1) - 5(y-1) + 13z = -8x - 5y + 13z + 13.$$

Donc

$$\begin{cases} \text{un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est} \\ \begin{cases} 2x + 5y - 7z = -14 \\ 8x + 5y - 13z = 13 \end{cases} \end{cases}$$

n° 16  $\vec{u} \in \vec{P}_1 \cap \vec{P}_2 \cap \vec{P}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$ .

Ainsi, les plans  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  sont tous trois parallèles à la droite affine (D) d'équations  $\begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$ . Ces plans définissent donc un prisme.

Déterminons alors l'aire d'une section droite. Le plan (P) d'équation  $3x + y + 2z = 0$  est perpendiculaire à la droite (D). Son intersection avec les plans  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  définit donc une section droite du prisme.

• Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace.

$$M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 5 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{z-5}{2} \\ x = \frac{3}{2}z \\ \frac{9}{2}z + \frac{z-5}{2} + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{5}{14} \\ y = -\frac{65}{28} \\ x = \frac{15}{28} \end{cases}$$

Notons A  $\left(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14}\right)$ .

• Soit M(x, y, z) un point de l'espace.

$$M \in (P_1) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 5 \\ 3y - x = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y + 5 \\ x = 3y \\ 9y + y + 2(2y + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{7} \\ x = -\frac{15}{7} \\ z = \frac{25}{7} \end{cases}$$

Notons B  $\left(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}\right)$ .

• Soit M(x, y, z) un point de l'espace.

$$M \in (P_2) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 3y - x = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Une section droite est OAB où A  $\left(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14}\right)$  et B  $\left(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}\right)$ . De plus

$$\begin{aligned} \text{aire de(OAB)} &= \frac{1}{2} \|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \sqrt{63^2 + 21^2 + 42^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \times 21 \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{75}{4\sqrt{14}} \end{aligned}$$

L'aire d'une section droite est  $\frac{75}{4\sqrt{14}}$ .

**n° 17** Soient (P) le plan d'équation  $x + 2y + 2z = 3$  et (P') le plan d'équation  $x + y = 0$ . L'angle entre (P) et (P') est l'angle entre les vecteurs normaux  $\vec{n}(1, 2, 2)$  et  $\vec{n}'(1, 1, 0)$  :

$$\left(\widehat{\vec{n}, \vec{n}'}\right) = \text{Arccos} \left( \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}'\|} \right) = \text{Arccos} \left( \frac{3}{3\sqrt{2}} \right) = \text{Arccos} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

**n° 18** Soit M(x, y, z) un point de l'espace. On a

$$d(M, (P_1)) = \frac{|4x + 4y - 7z - 1|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = \frac{|4x + 4y - 7z - 1|}{9} \text{ et } d(M, (P_2)) = \frac{|8x - 4y + z + 7|}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{|8x - 4y + z + 7|}{9}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) &\Leftrightarrow |4x + 4y - 7z - 1| = |8x - 4y + z + 7| \Leftrightarrow (4x + 4y - 7z - 1)^2 = (8x - 4y + z + 7)^2 \\ &\Leftrightarrow ((4x + 4y - 7z - 1) - (8x - 4y + z + 7))((4x + 4y - 7z - 1) + (8x - 4y + z + 7)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-4x + 8y - 8z - 8)(12x - 6z + 6) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 2 = 0 \text{ ou } 2x - z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Les plans bissecteurs de (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>) admettent pour équation cartésienne  $x - 2y + 2z + 2 = 0$  et  $2x - z + 1 = 0$ .

n° 19 • Déterminons un repère de (D).

$$\begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z = -x - 4 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$$

Un repère de (D) est  $(A, \vec{u})$  où  $A(0, -1, 1)$  et  $\vec{u}(1, 5, 2)$ .

• Puisque un système d'équations de (D') est  $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ , un repère de (D') est  $(A', \vec{u}')$  où  $A'(-1, -1, 0)$  et  $\vec{u}'(1, 1, 1)$ .

•  $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ .

Puisque  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D').

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est  $\begin{cases} [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \\ [\overrightarrow{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \end{cases}$ . Or,

$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y+1 & 5 & 1 \\ z-1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -22x + 10(y+1) - 14(z-1) = -22x + 10y - 14z + 24,$$

et

$$[\overrightarrow{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & -4 \end{vmatrix} = -5(x+1) + 7(y+1) - 2z = -5x + 7y - 2z + 2.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est

$$\begin{cases} 11x - 5y + 7z = 12 \\ 5x - 7y + 2z = 2 \end{cases}$$

n° 20 Notons p la projection orthogonale sur (P).

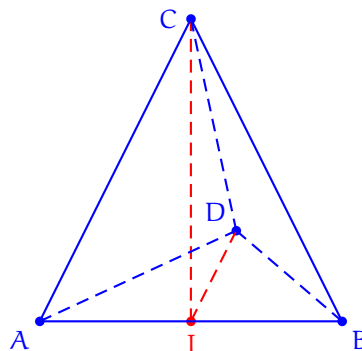
Un repère de (D) est  $(A, \vec{u})$  où  $A(0, -1, 2)$  et  $\vec{u}(1, 2, -3)$ . Un vecteur normal à (P) est  $\vec{n}(1, 3, 2)$ .  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  ne sont pas colinéaires et donc p(D) est une droite du plan (P).

Plus précisément, p(D) est l'intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et perpendiculaire à (P). Un repère de (P') est  $(A, \vec{u}, \vec{n})$ . Donc

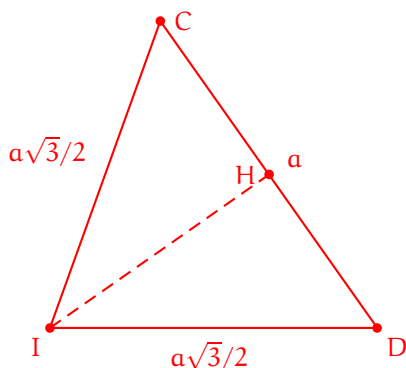
$$M(x, y, z) \in (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 5(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

La projetée orthogonale de (D) sur (P) est la droite d'équations  $\begin{cases} 13x - 5y + z = 7 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$ .

n° 21



**Angle entre deux arêtes.** Les faces du tétraèdre ABCD sont des triangles équilatéraux et donc l'angle entre deux arêtes est  $60^\circ$ .



**Angle entre une arête et une face.** C'est l'angle  $\widehat{CDI}$  de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CDI} = \text{Arccos} \left( \frac{HD}{DI} \right) = \text{Arccos} \left( \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} \right) = \text{Arccos} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 54,7\dots^\circ.$$

**Angle entre deux faces.** C'est l'angle  $\widehat{CID}$  de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CID} = \pi - 2\widehat{CDI} = 2 \left( \frac{\pi}{2} - \text{Arccos} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = 2 \text{Arcsin} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 70,5\dots^\circ.$$

**n° 22** Déterminons un repère de (D).

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = y \\ y + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{3} \\ z = x - \frac{10}{3} \end{cases}.$$

Un repère de (D) est  $(A, \vec{u})$  où  $A \left( \frac{10}{3}, \frac{10}{3}, 0 \right)$  et  $\vec{u}(1, 0, 1)$ .

On sait alors que

$$d(O, (D)) = \frac{\|\vec{AO} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{10}{3} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$$d(O, (D)) = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$