Planche n$^{\text{o}}$ 32. Courbes paramétrées

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n$^{\text{o}}$ 1 : (quelques grands classiques)

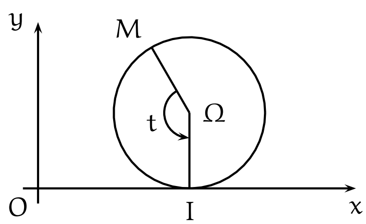
1) (**) L'astroïde.

a) a est un réel strictement positif donné. Etudier et construire la courbe de paramétrisation : $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$.

b) Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de la tangente au point courant $M(t)$ avec respectivement (Ox) et (Oy). Calculer la longueur $A(t)B(t)$.

2) (**) La cycloïde.

a) Un cercle $(\mathscr{C})$, de rayon $R > 0$, roule sans glisser sur l'axe (Ox). On note I le point de contact entre $(\mathscr{C})$ et (Ox) et on note Ω le centre de $(\mathscr{C})$ (Ω et I sont mobiles). M est un point donné de $(\mathcal{C})$ (M est mobile, mais solidaire de $(\mathscr{C})$). On pose $t = (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I}})$.



Déterminer une paramétrisation de la courbe décrite par le point M (on prendra t pour paramètre).

b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.

3) (**) Une courbe de Lissajous. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{array}\right.$

4) (**) La lemniscate de Bernoulli. Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right.$

5) (***) Les tractrices.

a) Trouver les trajectoires orthogonales à la famille des cercles de rayon R ($R > 0$ donné) et centrés sur (Ox).

b) Etudier et construire l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = R(\ln|\tan \frac{t}{2}| + \cos t) \\ y = R\sin t \end{array}\right.$ où R est un réel strictement positif donné.

n$^{\text{o}}$ 2 : Construire les courbes de paramétrisations :

1) $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \\ y = \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{l} x = (t+2)e^{1/t} \\ y = (t-2)e^{1/t} \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{l} x = (t-1)\ln(|t|) \\ y = (t+1)\ln(|t|) \end{array}\right.$ **4)** $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t+2}{1-t^2} \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t+2}{(t-1)^2} \end{array}\right.$ **6)** $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^3}{t^2-9} \\ y = \dfrac{t(t-2)}{t-3} \end{array}\right.$ **7)** $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t^3}{1+3t} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+3t} \end{array}\right.$ **8)** $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5 \end{array}\right.$

n$^{\text{o}}$ 3 : La courbe orthoptique d'une courbe $(\mathscr{C})$ est le lieu des points du plan d'où l'on peut mener (au moins) deux tangentes à $(\mathscr{C})$, orthogonales. Déterminer l'orthoptique de $(\mathscr{C})$ dans chacun des cas suivants :

1) $(\mathscr{C})$ est un astroïde de paramétrisation $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$, $a > 0$ donné.

2) $(\mathscr{C})$ est l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 - 2t \\ y = 2t^3 - 3t^2 \end{array}\right.$.

n° 4 : Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc paramétré : $\left\{\begin{array}{l} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{array}\right.$

n° 5 : Trouver une paramétrisation rationnelle de la courbe d'équation $x(y^2 - x^2) = 2y^2 - x^2$ puis construire cette courbe.

n° 6 Trouver une équation cartésienne des supports des arcs suivants :

$$\textbf{1)} \left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = -t^2 \end{array}\right. \quad \textbf{2)} \left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^3 \end{array}\right. \quad \textbf{3)} \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{array}\right. .$$

n° 7 : Soit T l'intersection de (Ox) et de la tangente en M et H le projeté orthogonal de M sur (Ox). Trouver les courbes telles que

1) $MT = a$ ($a > 0$ donné) (utilise la résolution d'une équation différentielle à variables séparables)
2) $HT = a$ (sans rapport avec 1))

