

Planche n° 32. Courbes paramétrées. Corrigé

n° 1 : (les grands classiques)

1) a) L'astroïde.

Domaine d'étude.

- Pour tout réel t , $M(t)$ existe.
- Pour tout réel t , $M(t+2\pi) = M(t)$. Par suite, la courbe complète est obtenue quand t décrit un segment de longueur 2π comme par exemple $[-\pi, \pi]$.
- Pour tout réel t ,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \cos^3(-t) \\ \sin^3(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Ox)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) .

- Pour tout réel t ,

$$M(t + \pi) = \begin{pmatrix} \cos^3(t + \pi) \\ \sin^3(t + \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

La portion de courbe obtenue quand t décrit $[-\pi, 0]$ est donc aussi la symétrique par rapport à O de la portion de courbe obtenue quand t décrit $[0, \pi]$. Néanmoins, cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine d'étude.

- Pour tout réel t ,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \cos^3(\pi - t) \\ \sin^3(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) , puis par réflexion d'axe (Ox) .

- Pour tout réel t ,

$$M\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ \sin^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^3 t \\ \cos^3 t \end{pmatrix} = s_{y=x}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$, puis d'axe (Oy) et enfin d'axe (Ox) .

Variations conjointes de x et y . La fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et la fonction $t \mapsto y(t)$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Etude des points singuliers. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t) = \begin{pmatrix} -3a \cos^2 t \sin t \\ 3a \sin^2 t \cos t \end{pmatrix} = 3a \cos t \sin t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Pour tout réel t , le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire et n'est donc pas nul. Par suite,

$$\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow 3a \cos t \sin t = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ ou } \sin t = 0 \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Les points singuliers sont donc les $M\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $M(t)$ est un point régulier et la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Etudions alors le point singulier $M(0)$. Pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} &= \frac{a \sin^3 t}{a \cos^3 t - a} = \frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \\ &= \frac{8 \sin^3 \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}}{-2 \sin^2 \frac{t}{2} (\cos^2 t + \cos t + 1)} = \frac{-4 \sin \frac{t}{2} \cos^3 \frac{t}{2}}{\cos^2 t + \cos t + 1}, \end{aligned}$$

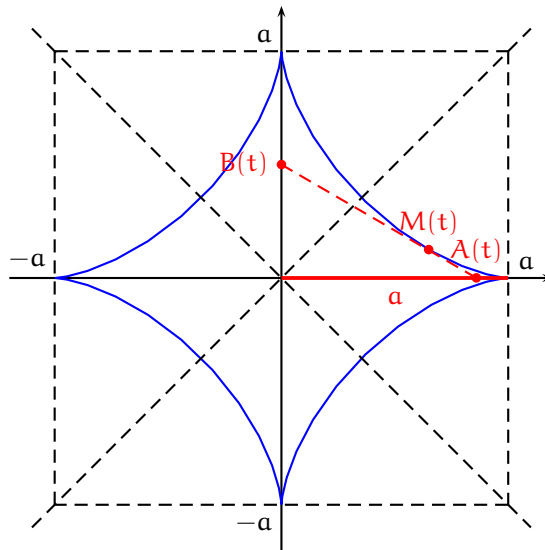
et donc, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = 0$.

(Si on connaît déjà les équivalents, c'est plus court : $\frac{\sin^3 t}{(\cos t - 1)(\cos^2 t + \cos t + 1)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{-\frac{t^2}{2} \times 3} = -\frac{2t}{3} \rightarrow 0$). La courbe

admet en $M(0)$ une tangente dirigée par le vecteur $(1, 0)$. Par symétrie, la courbe admet également une tangente en $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $M(\pi)$, dirigée respectivement par $(0, 1)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Toujours par symétrie, ces quatre points sont des points de rebroussement de première espèce. Il en résulte aussi que

pour tout réel t , la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-\cos t, \sin t)$.

On en déduit la courbe.



b) Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a vu que la tangente (T_t) en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-\cos t, \sin t)$. Une équation cartésienne de T_t est donc : $-\sin t(x - a \cos^3 t) - \cos t(y - a \sin^3 t) = 0$, ou encore

$$x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t \quad (T_t).$$

On en déduit immédiatement que $A(t)$ a pour coordonnées $(a \cos t, 0)$ et que $B(t)$ a pour coordonnées $(0, a \sin t)$ puis que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad A(t)B(t) = a.$$

2) La cycloïde.

a) La condition de roulement sans glissement se traduit par $\overline{OI} = \widehat{MI}$ ou encore $x_\Omega = Rt$. On en déduit que

$$x_M = x_\Omega + x_{\overline{OM}} = Rt + R \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = Rt - R \sin t = R(t - \sin t)$$

et

$$y_M = y_\Omega + y_{\overline{OM}} = R + R \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) = R - R \cos t = R(1 - \cos t).$$

b) Domaine d'étude.

- Pour tout réel t , $M(t)$ existe.
- Pour tout réel t , $M(t + 2\pi) = M(t) + \vec{u}$ où $\vec{u}(2\pi R, 0)$. Par suite, on trace la courbe quand t décrit $[0, 2\pi]$ et la courbe complète est obtenue par translations de vecteurs $k\vec{u}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Pour tout réel t , $M(-t) = (-x(t), y(t)) = s_{(Oy)}(M(t))$. On trace la courbe quand t décrit $[0, \pi]$, puis on complète par réflexion d'axe (Oy) puis par translations.

Etude des points singuliers.

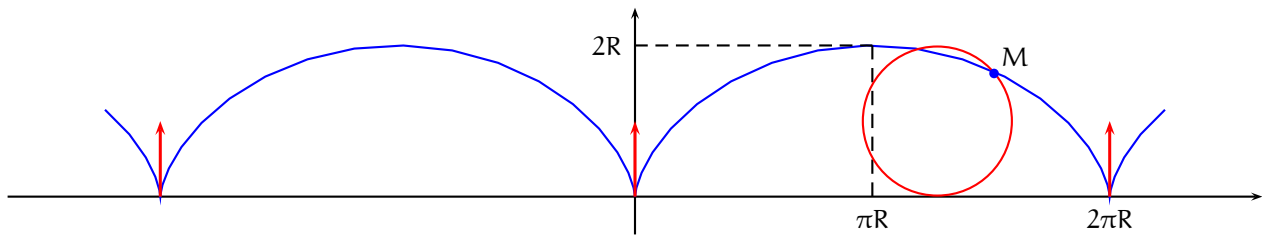
Pour $t \in [0, \pi]$, $x'(t) = R(1 - \cos t) = 2R \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ et $y'(t) = R \sin t = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Le point $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \in]0, \pi]$. Dans ce cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} 2R \sin^2(t/2) \\ 2R \sin(t/2) \cos(t/2) \end{pmatrix}$ ou encore par $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Etudions également le point singulier $M(0)$. Pour $t \in]0, \pi]$,

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{R(1 - \cos t)}{R(t - \sin t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^3/6} = \frac{3}{t}.$$

Ainsi, $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = +\infty$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $(0, 1)$. Ainsi, dans tous les cas, la tangente en $M(t)$

est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$. Par symétrie, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Sinon, x et y sont des fonctions croissantes sur $[0, \pi]$.



3) une courbe de LISSAJOUS

Domaine d'étude.

- Pour tout réel t , $M(t)$ existe.
- Pour tout réel t , $M(t + 2\pi) = M(t)$ et la courbe complète est obtenue quand t décrit $[-\pi, \pi]$.
- Pour tout réel t ,

$$M(-t) = \begin{pmatrix} \sin(-2t) \\ \sin(-3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ -\sin(3t) \end{pmatrix} = s_O(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \pi]$, puis on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O .

- Pour tout réel t ,

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi - 2t) \\ \sin(3\pi - 3t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} = s_{(Oy)}(M(t)).$$

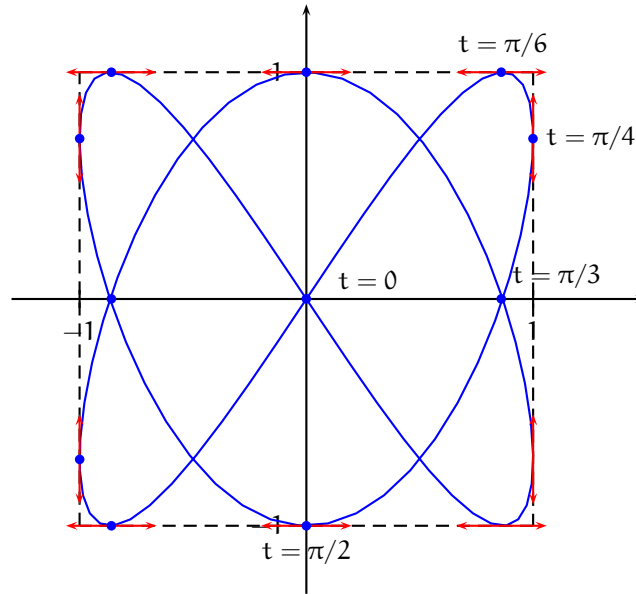
On étudie et on construit la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par symétrie centrale de centre O .

- On note aussi que $M(t + \pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, mais cette constatation ne permet pas de réduire davantage le domaine d'étude.

Variations conjointes de x et y . Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x'(t) = 2 \cos(2t)$ et $y'(t) = 3 \cos(3t)$. On en déduit immédiatement le tableau suivant :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		+	0	-
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
y	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$y'(t)$		+	0	-

puis on en déduit la courbe.



Points multiples. D'abord, tout point de l'arc est multiple, puisque la courbe est parcourue une infinité de fois. Il y a essentiellement deux « vrais points » multiples à déterminer, les autres s'en déduisent par symétrie. L'un des deux est le point de (Ox) d'abscisse strictement positive obtenu pour un certain réel t de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}.$$

Le point de la courbe qui est sur (Ox) et qui a une abscisse strictement positive est le point $M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Sinon, on cherche $t_1 \in]0, \frac{\pi}{3}[$ et $t_2 \in]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}[$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$.

$$\begin{aligned} M(t_1) = M(t_2) &\Leftrightarrow x(t_1) = x(t_2) \Leftrightarrow t_2 \in t_1 + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } t_2 \in \frac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z} \Rightarrow t_2 \in \frac{\pi}{2} - t_1 + \pi\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} - t_1 - \pi \Rightarrow t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $t_2 = -\frac{\pi}{2} - t_1$, alors $x(t_1) = x(t_2)$ et donc,

$$\begin{aligned} M(t_1) = M(t_2) &\Leftrightarrow y\left(-\frac{\pi}{2} - t_1\right) = y(t_1) \Leftrightarrow \sin\left(3\left(-\frac{\pi}{2} - t_1\right)\right) = \sin(3t_1) \\ &\Leftrightarrow 3t_1 \in -\frac{3\pi}{2} - 3t_1 + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 3t_1 \in \pi + \frac{3\pi}{2} + 3t_1 + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 6t_1 \in -\frac{3\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t_1 \in -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Le point $M\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est le point multiple d'abscisse et d'ordonnée strictement positives.

4) La lemniscate de BERNOULLI

Domaine d'étude.

- Pour tout réel t , $M(t)$ existe.
- Pour tout réel t , $M(-t) = s_O(M(t))$. On étudie et construit la courbe quand t décrit \mathbb{R}^+ et on obtient la courbe complète par symétrie centrale de centre O .
- Pour $t > 0$,

$$M\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{\frac{1}{t}}{1 + \frac{1}{t^4}}, \frac{\frac{1}{t^3}}{1 + \frac{1}{t^4}}\right) = \left(\frac{t^3}{1 + t^4}, \frac{t}{1 + t^4}\right) = s_{y=x}(M(t)).$$

On étudie et construit la courbe quand t décrit $[0, 1]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe la droite d'équation $y = x$ puis par symétrie centrale de centre O .

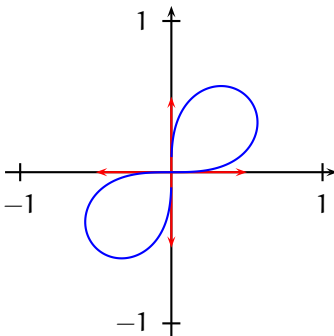
Variations conjointes de x et y . Les fonctions x et y sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour $t \in [0, 1]$,

$$x'(t) = \frac{(1+t^4) - t(4t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \text{ et } y'(t) = \frac{3t^2(1+t^4) - t^3(4t^3)}{(1+t^4)^2} = \frac{t^2(3-t^4)}{(1+t^4)^2}.$$

On en déduit immédiatement le tableau :

t	0	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	1
$x'(t)$	+	0	-
x	0	$\frac{(\sqrt[4]{3})^3}{4}$	$\frac{1}{2}$
y	0		$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0	+	

La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $(1, 0)$. Par symétrie, la tangente en « $M(+\infty)$ » est dirigée par le vecteur $(0, 1)$.

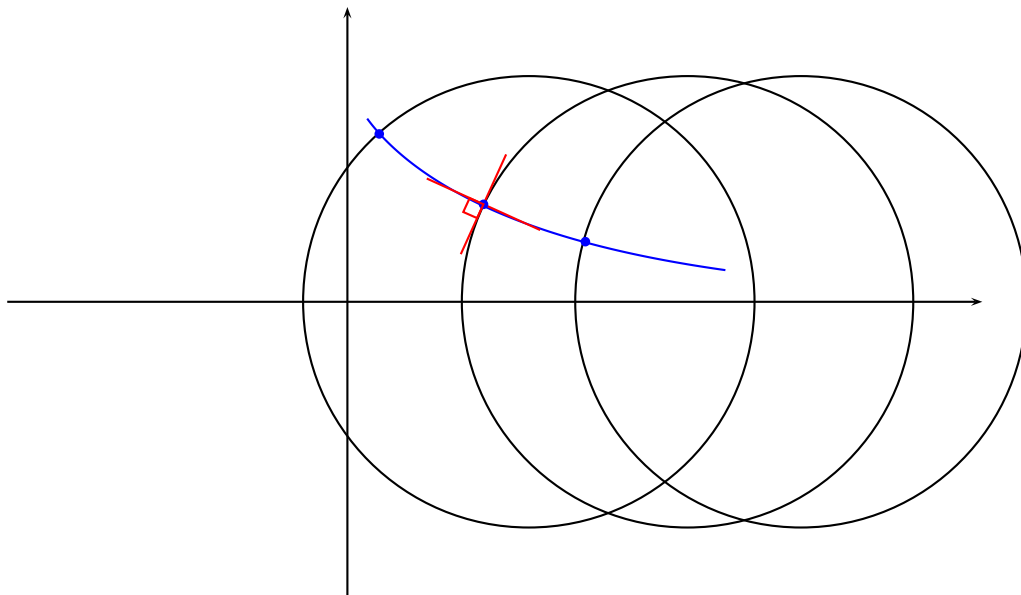


5) Les tractrices

a) Cherchons les arcs solutions sous la forme $\begin{cases} x = f(t) + R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$ où f est une fonction dérivable sur un certain intervalle I

(de sorte que le point $M(t)$ est sur le cercle $\mathcal{C}(t)$ de centre $\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon R). La trajectoire cherchée est orthogonale à chaque cercle $\mathcal{C}(t)$ si et seulement si la tangente à cette trajectoire en $M(t)$ est orthogonale à la tangente au cercle $\mathcal{C}(t)$ en $M(t)$ ou encore « si et seulement si » les vecteurs $(f'(t) - R \sin t, R \cos t)$ et $(-\sin t, \cos t)$ sont orthogonaux. Cette

dernière condition s'écrit $-f'(t) \sin t + R(\sin^2 t + \cos^2 t) = 0$ ou encore $f'(t) = \frac{R}{\sin t}$ ou enfin, $f(t) = R \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C$. Les arcs solutions sont les arcs de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} R \left(\ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + \cos t \right) + C \\ R \sin t \end{pmatrix}$, où $C \in \mathbb{R}$.



Les courbes solutions se déduisent de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} R \left(\ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + \cos t \right) \\ R \sin t \end{pmatrix}$ par translations de vecteurs colinéaires

à \vec{i} . On peut montrer que la courbe obtenue est la trajectoire de la roue arrière d'une voiture quand celle-ci se gare en marche avant, la roue avant étant quant à elle collée au trottoir.

b) Domaine d'étude. La fonction $t \mapsto M(t)$ est 2π -périodique et on l'étudie donc sur $[-\pi, \pi]$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M(t)$ existe si et seulement si $t \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$.

Pour $t \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$, $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$ puis

$$M(\pi - t) = \begin{pmatrix} R \left(\ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) \right| + \cos(\pi - t) \right) \\ R \sin(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \left(-\ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| - \cos t \right) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} = s_{Oy}(M(t)).$$

On étudie et on construit la courbe quand t décrit $]0, \frac{\pi}{2}]$, et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par réflexion d'axe (Ox) .

Dérivée. Etude des points singuliers. Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} R \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right) \\ R \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ R \cos t \end{pmatrix} = R \frac{\cos t}{\sin t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Par suite, $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 t}{\sin t} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point singulier.

Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$, $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = R(\sin t - 1) = -R \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \right) \sim -\frac{R}{2} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)^2$. D'autre part, posons $h = \frac{\pi}{2} - t$ ou encore $t = \frac{\pi}{2} - h$. Quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$,

$$x'(t) = R \frac{\cos^2 t}{\sin t} = R \frac{\sin^2 h}{\cos h} \sim Rh^2 = R \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right),$$

et donc par intégration,

$$x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R}{3} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right) \sim \frac{R}{3} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3.$$

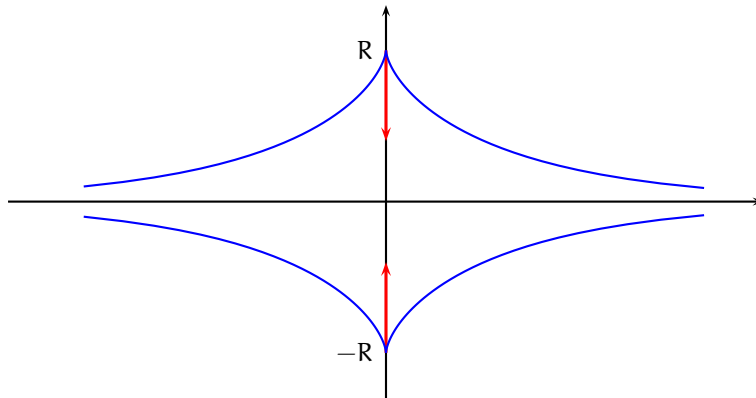
Comme d'autre part, $y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -R(1 - \sin t) = -R(1 - \cos h) \sim -\frac{R}{2}h^2 = -\frac{R}{2} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$, on en déduit que

$$\frac{y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sim \frac{-\frac{R}{2} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\frac{R}{3} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2 \left(t - \frac{\pi}{2}\right)},$$

et donc $\lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ t < \frac{\pi}{2}}} \frac{y(t) - y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x(t) - x\left(\frac{\pi}{2}\right)} = +\infty$. Par symétrie d'axe (Oy) , la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est dirigée par \vec{j} et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Sinon, les fonctions x' et y' sont strictement positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. On en déduit que les fonctions x et y sont strictement croissantes sur cet intervalle. Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers 0. On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe. D'autre part, x croît de $-\infty$ à 0 pendant que y croît de 0 à 1.

Courbe.



n° 2 : 1) Domaine d'étude. $M(t)$ existe si et seulement si $t \notin \{-1, 1\}$. Sinon, il n'y a pas de symétrie particulière (la fonction y est effectivement paire, mais x n'est ni paire ni impaire).

Dérivées. Une dérivée logarithmique fournit pour $t \in]-1, 1[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)(3 \ln |t| - 2 \ln |t+1| - \ln |t-1|)' = \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \left(\frac{3}{t} - \frac{2}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) \\ &= \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} \frac{3(t^2-1) - 2(t^2-t) - (t^2+t)}{t(t+1)(t-1)} = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai par continuité de x' en 0 et

$$y'(t) = \frac{2t(t^2-1) - 2t(t^2)}{(t^2-1)^2} = \frac{-2t}{(t^2-1)^2},$$

Etude des points singuliers. Pour $t \in]-1, 1[$, $\frac{dM}{dt}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$. $M(0) = (0, 0)$ est l'unique point singulier. Pour $t \in]-1, 1[\setminus\{0\}$,

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{t^2}{t^2-1} \frac{(t+1)^2(t-1)}{t^3} = \frac{t+1}{t}.$$

Par suite, $\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)}$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures et vers $-\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs inférieures. La tangente en $M(0)$ est dirigée par \vec{j} et d'autre part, $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce car x change de signe au voisinage de 0 tandis que y n'en change pas.

Etude quand t tend vers $\pm\infty$. Quand t tend vers $\pm\infty$, $M(t)$ tend vers le point $(1, 1)$. On prolonge la courbe en posant $M(\infty) = (1, 1)$. On a alors

$$\frac{y(t) - y(\infty)}{x(t) - x(\infty)} = \left(\frac{t^2}{t^2 - 1} - 1 \right) \left(\frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} - 1 \right)^{-1} = \frac{1}{t^2 - 1} \frac{(t+1)^2(t-1)}{-t^2 + t + 1} = \frac{t+1}{-t^2 + t + 1} \sim -\frac{1}{t}.$$

Cette expression tend donc vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$ et la tangente en $M(\infty)$ est dirigée par \vec{i} .

Etude quand t tend vers 1. Quand t tend vers 1, $x(t) \sim \frac{1}{4(t-1)}$ et $y(t) \sim \frac{1}{2(t-1)}$. Donc, x et y tendent vers l'infini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim 2$ puis

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2}{t^2 - 1} - 2 \frac{t^3}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{t^2(t+1) - 2t^3}{(t+1)^2(t-1)} = -\frac{t^2}{(t+1)^2}.$$

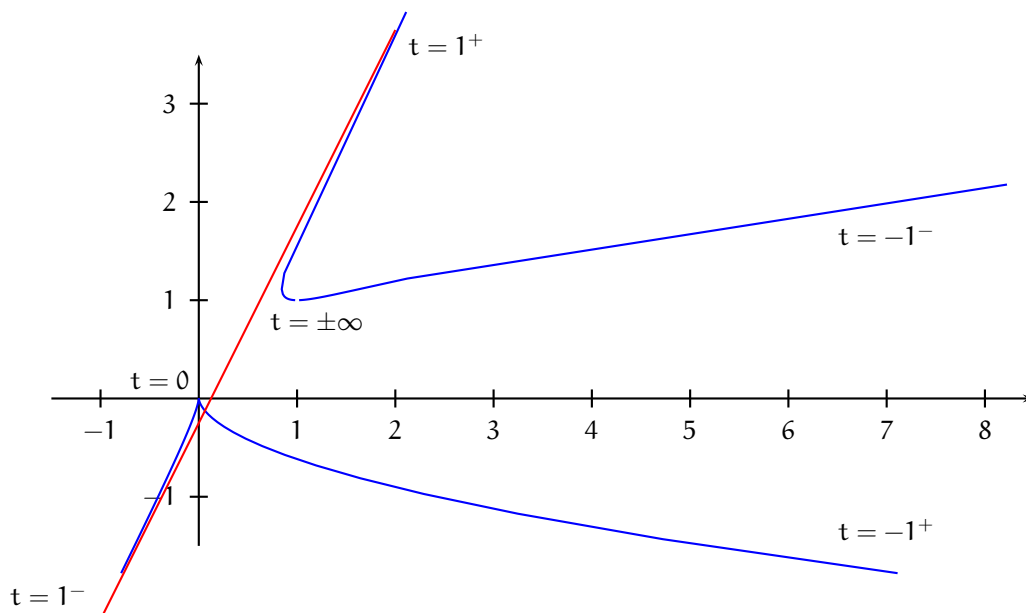
Cette dernière expression tend vers $-\frac{1}{4}$ et la droite (Δ) d'équation $y = 2x - \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe.

Etude quand t tend vers -1. Quand t tend vers -1, $x(t) \sim \frac{1}{2(t+1)^2}$ et $y(t) \sim \frac{-1}{2(t+1)}$. Donc, x et y tendent vers l'infini et il y a branche infinie. De plus, $\frac{y(t)}{x(t)} \sim -(t+1)$. Par suite, $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers -1. La courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) .

Variations conjointes de x et y . On rappelle que pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $x'(t) = \frac{t^2(t-3)}{(t+1)^3(t-1)^2}$ et $y'(t) = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}$. On en déduit le tableau suivant :

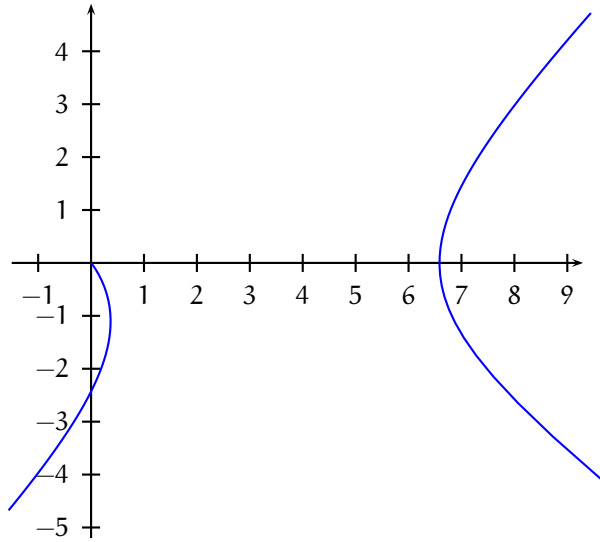
t	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
$x'(t)$	+		- 0 -		- 0 +	
x	1 \nearrow $+\infty$	$+\infty \searrow$ 0 \searrow $-\infty$		$+\infty \searrow$ 0 \nearrow 1		
y	1 \nearrow $+\infty$	$-\infty \nearrow$ 0 \searrow $-\infty$		$+\infty \searrow$ 0 \searrow 1		
$y'(t)$	+		+ 0 -		-	

On peut noter que la tangente en $M(3)$ est dirigée par le vecteur \vec{j} .

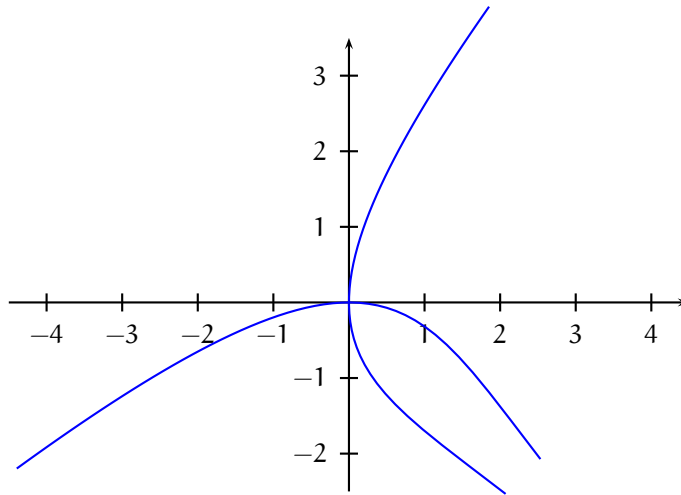


Dans la suite de cet exercice, on ne détaillera que très peu ou pas du tout l'étude de la courbe.

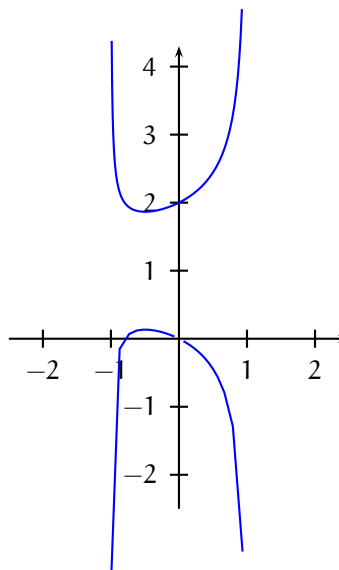
2)



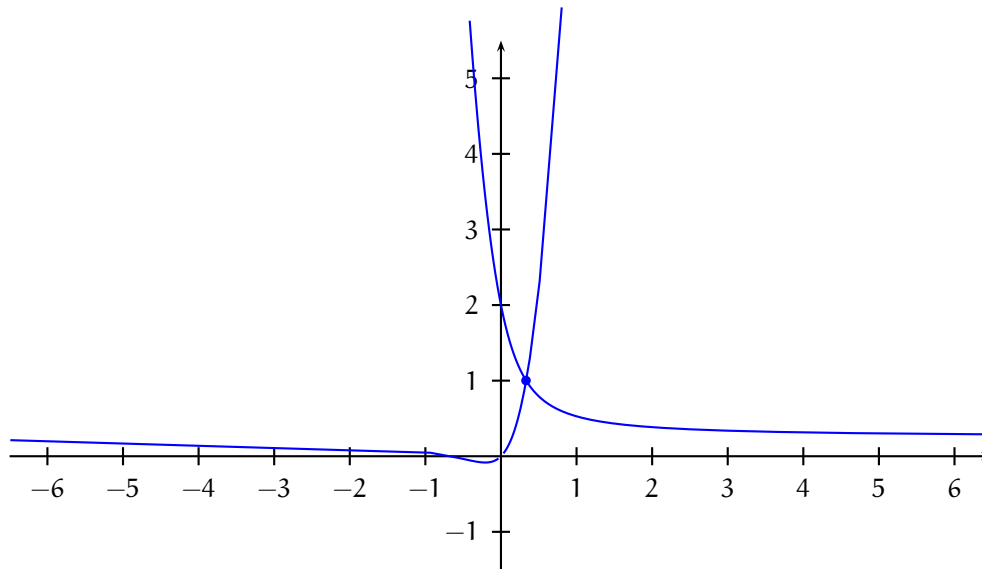
3)



4)



5)



Recherche du point multiple. Soient t_1 et t_2 deux éléments de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ tels que $t_1 < t_2$.

$$\begin{aligned}
 M(t_1) = M(t_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1} \\ \frac{t_1 + 2}{(t_1 - 1)^2} = \frac{t_2 + 2}{(t_2 - 1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1(t_2^2 - 1) = t_2(t_1^2 - 1) \\ (t_1 + 2)(t_2 - 1)^2 = (t_2 + 2)(t_1 - 1)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (t_1 t_2^2 - t_2 t_1^2) + (t_2 - t_1) = 0 \\ (t_1 + 2)(t_2^2 - 2t_2 + 1) - (t_2 + 2)(t_1^2 - 2t_1 + 1) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (t_2 - t_1)(t_1 t_2 + 1) = 0 \\ (t_1 t_2^2 - t_2 t_1^2) + 2(t_2^2 - t_1^2) - 5(t_2 - t_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t_2 - t_1)(t_1 t_2 + 1) = 0 \\ (t_2 - t_1)(t_1 t_2 + 2(t_1 + t_2) - 5) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 t_2 = -1 \\ -1 + 2(t_1 + t_2) - 5 = 0 \quad (\text{car } t_2 - t_1 \neq 0) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 t_2 = -1 \\ t_1 + t_2 = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow t_1 \text{ et } t_2 \text{ sont les solutions de l'équation } X^2 - 3X - 1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ et } t_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.
 \end{aligned}$$

Enfin,

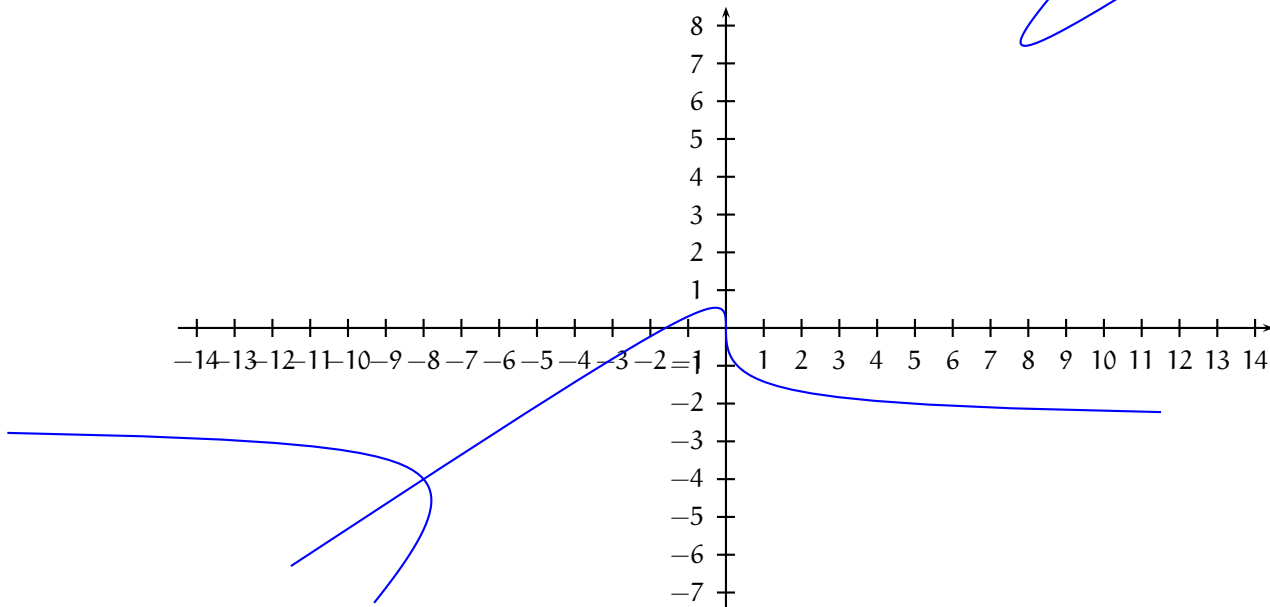
$$x(t_1) = \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_1}{3t_1 + 1 - 1} = \frac{1}{3},$$

et

$$y(t_1) = \frac{t_1 + 2}{t_1^2 - 2t_1 + 1} = \frac{t_1 + 2}{3t_1 + 1 - 2t_1 + 1} = 1,$$

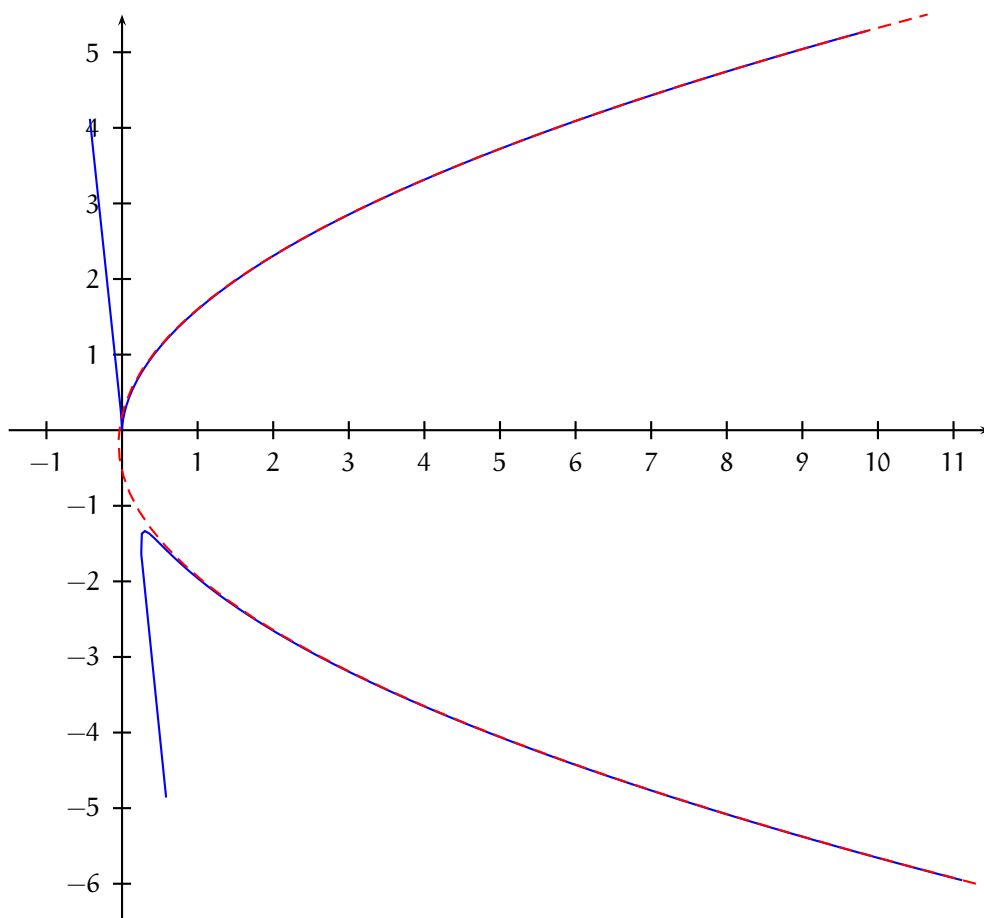
Le point multiple a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

6)



Etude du point $M(0)$. $M(0) = (0,0)$. Quand t tend vers 0, $x(t) \sim -\frac{t^3}{9}$ et en particulier, $x(t) = o(t)$ et on en déduit que $x'(0) = 0$. De même, $y(t) \sim \frac{2t}{3}$ et donc $y(t) = \frac{2t}{3} + o(t)$. On en déduit que $y'(0) = \frac{2}{3}$ puis que $\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(0) = \frac{2}{3}\vec{j}$. La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur \vec{j} . De plus, x et y changent de signe quand t franchit 0 et donc $M(0)$ est un point d'inflexion.

7)



Recherche d'une courbe asymptote quand t tend vers $\pm\infty$. Quand t tend vers $\pm\infty$, $x(t) \sim \frac{t^2}{3}$ et $y(t) \sim t$. Donc $x(t) \sim \frac{y(t)^2}{3}$. Ensuite,

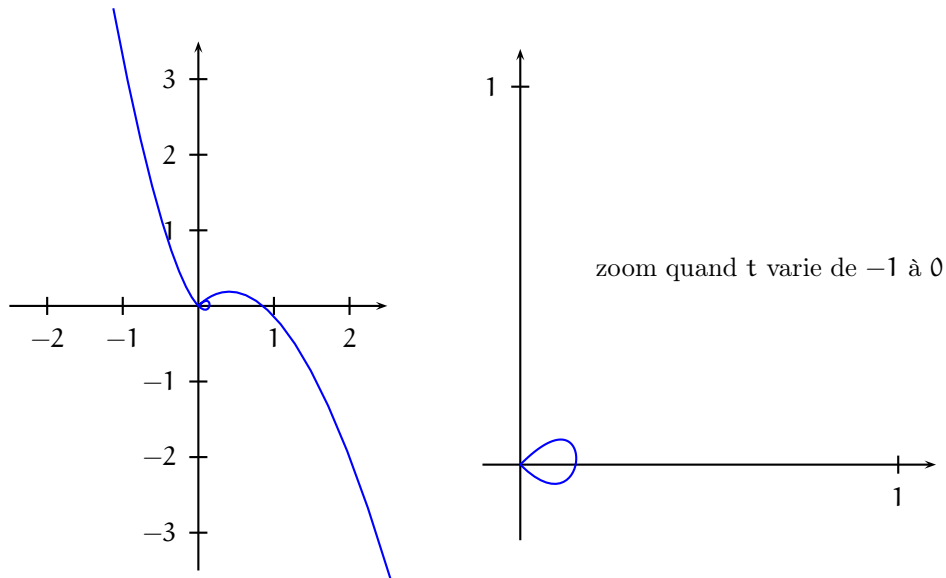
$$x(t) - \frac{y(t)^2}{3} = \frac{t^3}{1+3t} - \frac{3t^4}{(1+3t)^2} = \frac{t^3(1+3t) - 3t^4}{(1+3t)^2} = \frac{t^3}{(1+3t)^2} \sim \frac{t}{9} \sim y(t)^9,$$

puis

$$x(t) - \frac{y(t)^2}{3} - \frac{y(t)}{9} = \frac{t^3}{(1+3t)^2} - \frac{t^2}{3(1+3t)} = \frac{3t^3 - t^2(1+3t)}{3(1+3t)^2} = \frac{-t^2}{3(1+3t)^2} \sim -\frac{1}{27}.$$

Finalement, $x(t) - \frac{y(t)^2}{3} - \frac{y(t)}{9} + \frac{1}{27}$ tend vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$. On en déduit que la parabole d'équation $x = \frac{y^2}{3} + \frac{y}{9} - \frac{1}{27}$ est asymptote à la courbe.

8)



n° 3 : 1) Orthoptique de l'astroïde.

On a vu au n° 1, que la tangente (T_t) en $M(t)$ est toujours dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = (-\cos t, \sin t)$. Une équation de la tangente en $M(t)$ est donc $\sin t(x - a \cos^3 t) + \cos t(y - a \sin^3 t) = 0$ ou encore

$$x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t (T_t).$$

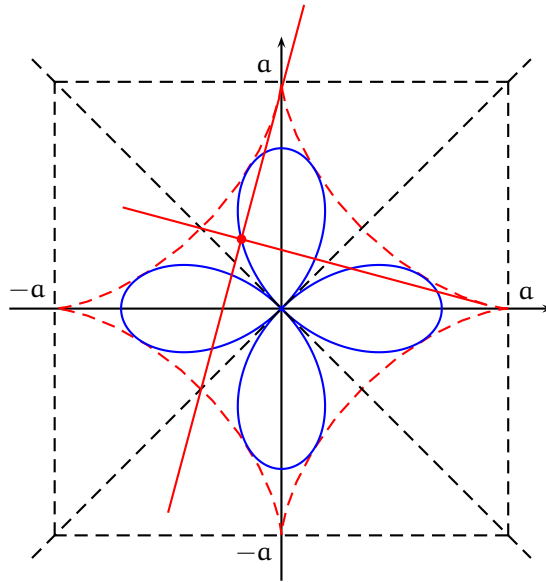
Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$(T_{t_1}) \perp (T_{t_2}) \Leftrightarrow \vec{u}(t_1) \cdot \vec{u}(t_2) = 0 \Leftrightarrow \cos t_1 \cos t_2 + \sin t_1 \sin t_2 = 0 \Leftrightarrow \cos(t_2 - t_1) = 0 \Leftrightarrow t_2 \in t_1 + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Il est alors clair que l'orthoptique de l'astroïde est l'ensemble des points d'intersection des tangentes (T_t) et $(T_{t+\frac{\pi}{2}})$ quand t décrit \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (T_t) \cap (T_{t+\frac{\pi}{2}}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t \\ x \cos t - y \sin t = -a \sin t \cos t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = - \begin{vmatrix} a \sin t \cos t & \cos t \\ -a \sin t \cos t & -\sin t \end{vmatrix} \text{ et } y = - \begin{vmatrix} \sin t & a \sin t \cos t \\ \cos t & -a \sin t \cos t \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = a \sin t \cos t (-\cos t + \sin t) \text{ et } y = a \sin t \cos t (\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

L'orthoptique de l'astroïde est la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix} a \sin t \cos t (-\cos t + \sin t) \\ a \sin t \cos t (\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$.



2) Soit $t \in \mathbb{R}$. $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 6t^2-6t \end{pmatrix} = 2(t-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3t \end{pmatrix}$. Pour $t \neq 1$, le point $M(t)$ est régulier et la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = (1, 3t)$.

Quand t tend vers 1,

$$\frac{y(t) - y(1)}{x(t) - x(1)} = \frac{2t^3 - 3t^2 + 1}{t^2 - 2t + 1} = \frac{(t-1)(2t^2 - t - 1)}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)(2t+1)}{t-1} = 2t + 1.$$

Cette expression tend vers 3 quand t tend vers 1. Par suite, la courbe admet en $M(1)$ une tangente de coefficient directeur 3. Cette tangente est dirigée par le vecteur $(1, 3)$ et finalement

pour tout réel t , la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t)(1, 3t)$.

Une équation de la tangente (T_t) à la courbe en $M(t)$ est donc $-3t(x - t^2 + 2t) + (y - 2t^3 + 3t^2) = 0$ ou encore

$$(T_t) : y = 3tx - t^3 + 3t^2$$

Soient t_1 et t_2 deux réels. $(T_{t_1}) \perp (T_{t_2}) \Leftrightarrow 1 + 9t_1 t_2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = -\frac{1}{9t_1}$.

1ère solution. L'orthoptique (\mathcal{C}) cherchée est donc l'ensemble des points d'intersection des tangentes (T_t) et $(T_{-1/9t})$ quand t décrit $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} M(x, y) (T_t) \cap (T_{-1/9t}) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3tx - t^3 + 3t^2 \\ y = -\frac{1}{3t}x + \frac{1}{729t^3} + \frac{1}{27t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3tx - t^3 + 3t^2 \\ \frac{9t^2 + 1}{3t}x = \frac{729t^6 - 2187t^5 + 27t + 1}{729t^3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{729t^6 - 2187t^5 + 27t + 1}{243t^2(9t^2 + 1)} \\ y = 3t \frac{729t^6 - 2187t^5 + 27t + 1}{243t^2(9t^2 + 1)} - t^3 + 3t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{729t^6 - 2187t^5 + 27t + 1}{243t^2(9t^2 + 1)} \\ y = \frac{-243t^5 + 729t^4 + 81t^2 + 3t}{243t^2(9t^2 + 1)} \end{cases} \end{aligned}$$

2ème solution. Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $M \in (\mathcal{C})$ si et seulement si il existe $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = 3t_1x - t_1^3 + 3t_1^2$, $y = 3t_2x - t_2^3 + 3t_2^2$ et $t_1 t_2 = -\frac{1}{9}$. Ces conditions sont équivalentes au fait que l'équation $t^3 - 3t^2 - 3tx + y = 0$, (E), admet trois solutions complexes, deux de ces solutions t_1 et t_2 étant réelles telles que $t_1 t_2 = -\frac{1}{9}$. Ainsi,

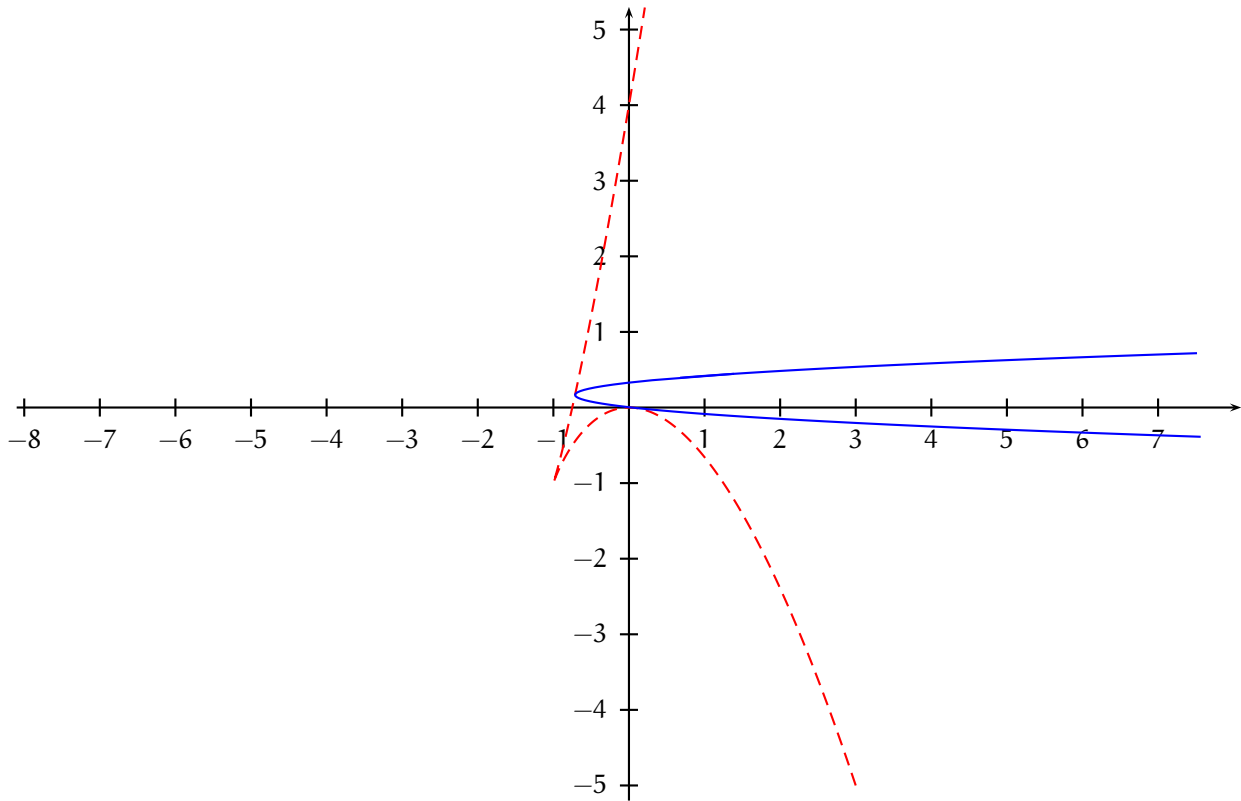
$$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} t_1 t_2 = -\frac{1}{9} \\ t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -3x \\ t_1 t_2 t_3 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \exists (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} t_1 t_2 = -\frac{1}{9} \text{ (I)} \\ t_3 = 9y \text{ (II)} \\ t_1 + t_2 = 3 - 9y \text{ (III)} \\ -\frac{1}{9} + (3 - 9y)9y = -3x \text{ (IV)} \end{cases}$$

La condition (IV) équivaut au fait que l'équation (E) ait trois solutions complexes telles que $t_1 t_2 = -\frac{1}{9}$.

Les conditions (I) et (III) signifient que t_1 et t_2 sont les solutions de l'équation $X^2 + (3 - 9y)X - \frac{1}{9} = 0$. Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = (3 - 9y)^2 + \frac{4}{81} > 0$ et donc t_1 et t_2 sont réels quelque soit le choix de x et y . Finalement

$$M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow -\frac{1}{9} + (3 - 9y)9y = -3x \Leftrightarrow x = 27y^2 - 9y + \frac{1}{27}.$$

L'orthoptique cherchée est une parabole.



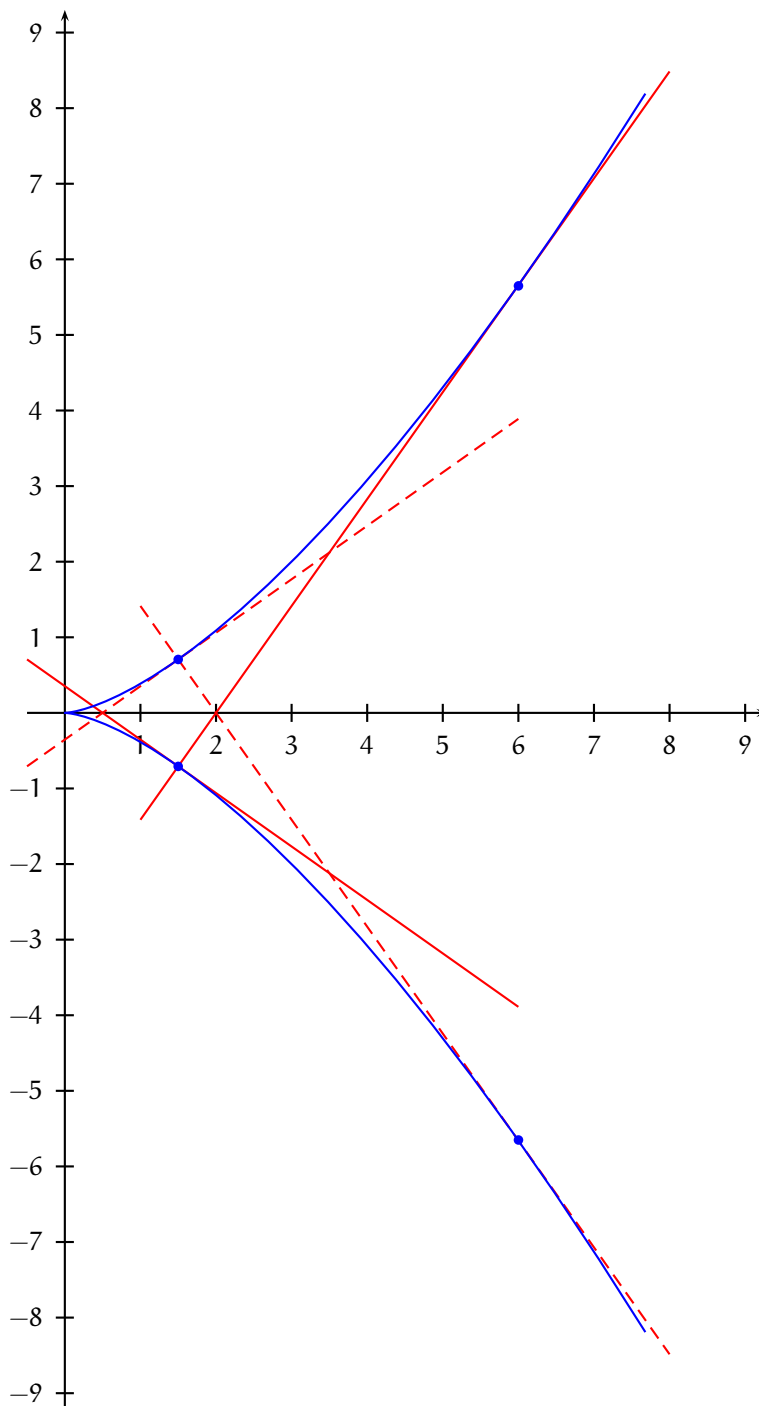
n° 4 : Pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix} = 6t \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$. Le point $M(t)$ est régulier si et seulement si $t \neq 0$ et dans ce cas, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$. D'autre part, pour $t \neq 0$, $\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{2t}{3}$. Cette expression tend vers 0 quand t tend vers 0 et la tangente en $M(0)$ est de nouveau dirigée par le vecteur $(1, 0)$. Finalement, pour tout réel t , la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et la normale en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $(t, u) \in \mathbb{R}^2$. La tangente en $M(t)$ et la normale en $M(u)$ sont parallèles si et seulement si $1 + tu = 0$ ou encore $u = -\frac{1}{t}$.

- Une équation de la tangente (T) en $M(t)$ est $-t(x - 3t^2) + (y - 2t^3) = 0$ ou encore $-tx + y + t^3 = 0$.
- Une équation de la normale (N) en $M\left(-\frac{1}{t}\right)$ est $\left(x - \frac{3}{t^2}\right) - \frac{1}{t}\left(y + \frac{2}{t^3}\right) = 0$ ou encore $-tx + y + \frac{3}{t} + \frac{2}{t^3} = 0$.

Par suite, $(T) = (N) \Leftrightarrow t^3 = \frac{3}{t} + \frac{2}{t^3} \Leftrightarrow t^6 - 3t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 1)(t^4 - t^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 1)^2(t^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Les droites à la fois tangentes et normales à la courbe sont la tangente en $M(\sqrt{2}) = (6, 4\sqrt{2})$ d'équation $y = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$ (qui est aussi normale en $M\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$) et la tangente en $M(-\sqrt{2}) = (6, -4\sqrt{2})$ d'équation $y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$ (qui est la symétrique de la première par rapport à l'axe des abscisses).



n° 5 : On note (\mathcal{C}) la courbe considérée. Pour $t \in \mathbb{R}$, notons (D_t) la droite d'équation $y = tx$ et (D_∞) la droite d'équation $x = 0$. Tout point du plan distinct de O appartient à une et une seule droite (D_t) , $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et O appartient à toutes les droites (D_t) , $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1) Déterminons l'intersection de (\mathcal{C}) avec (D_∞) . Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$M(0, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow 0(y^2 - 0) = 0 - x^2 \Leftrightarrow x = 0.$$

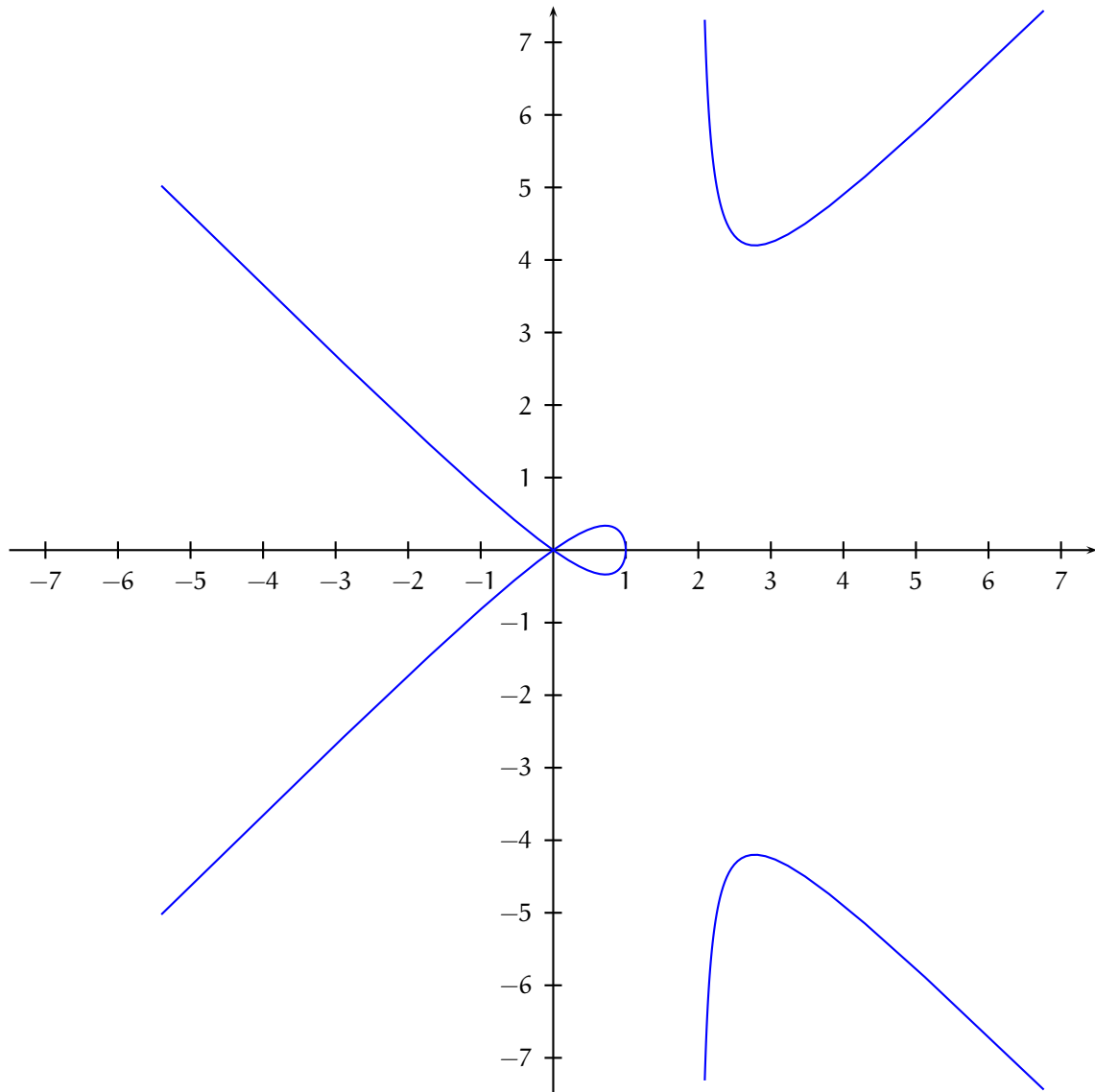
Donc, $(\mathcal{C}) \cap (D_\infty) = \{O\}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (\mathcal{C}) \cap (D_t) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x(y^2 - x^2) = 2y^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^3(t^2 - 1) = 2t^2x^2 - x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 0 = y \text{ ou } \begin{cases} y = tx \\ x(t^2 - 1) = 2t^2 - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc si $t \in \{-1, 1\}$, l'intersection de $(\mathcal{C}) \cap (D_t)$ est réduite au point O . Si $t \notin \{-1, 1\}$, $(\mathcal{C}) \cap (D_t)$ est constituée du point O et du point de coordonnées $\left(\frac{2t^2-1}{t^2-1}, \frac{2t^3-t}{t^2-1}\right)$ qui peut encore être égal à O pour $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Finalement, (\mathcal{C}) est le support de l'arc paramétré $\begin{cases} x = \frac{2t^2-1}{t^2-1} \\ y = \frac{2t^3-t}{t^2-1} \end{cases}$. On en déduit le tracé :



n° 6 : 1) $M(x, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = t^2 \\ y = -t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = t^2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow y = -x \text{ et } x \geq 0$. (si $x < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 \neq x$ et si $x \geq 0$, pour $t = \sqrt{x}$, on a $t^2 = x$). (\mathcal{C}) est la demi-droite : $y = -x$ et $x \geq 0$.

2) $M(x, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = t^2 \\ t = y^{1/3} \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = y^{2/3} \\ t = y^{1/3} \end{cases} \Leftrightarrow x = y^{2/3}$. (\mathcal{C}) est la courbe d'équation $x = y^{2/3}$.

3) $M(x, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = t^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x^2 = \frac{t^2}{(1+t^4)^2} \\ y = t^2 x \end{cases}$ (pour \Leftarrow , si

$x^2 = \frac{t^2}{(1+t^4)^2}$ alors $x = \frac{t}{1+t^4}$ ou $x = \frac{-t}{1+(-t)^4}$ et l'un des deux réels $t' = \pm t$ vérifie $x = \frac{t'}{1+t'^4}$). Donc,

$$M(x, y) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ ou } x \neq 0 \text{ et } \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} t^2 = \frac{y}{x} \\ x^2 = \frac{\frac{y}{x}}{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0 \text{ ou } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } x^2 = \frac{\frac{y}{x}}{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2} \text{ (pour } \Leftarrow, x^2 = \frac{\frac{y}{x}}{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2} \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0 \text{ ou } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2} = \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0 \text{ ou } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } (x^2 + y^2)^2 = xy \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = xy.$$

Réciproquement, si $(x^2 + y^2)^2 = xy$ et $x = 0$ alors $y = 0$ et si $(x^2 + y^2)^2 = xy$ et $y = 0$ alors $x = 0$. Par suite, $(x^2 + y^2)^2 = xy \Rightarrow x = y = 0$ ou $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et $(x^2 + y^2)^2 = xy$. Finalement (voir n° 4, 4)),

une équation cartésienne de la lemniscate de BERNOULLI est $(x^2 + y^2)^2 = xy$.

n° 7 : 1) Un segment de droite parallèle à (Oy) n'est sûrement pas solution du problème. On peut donc chercher les courbes inconnues à partir d'une équation de la forme $y = f(x)$ où f est une application dérivable sur un certain intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . De plus, nécessairement, f' ne peut s'annuler sur I car dans le cas contraire, le point T n'est pas défini et f ne peut s'annuler sur I car $MT = 0 \neq a$.

Soit $x_0 \in I$. Le point M_0 de (\mathcal{C}) d'abscisse x_0 a pour coordonnées $(x_0, f(x_0))$. La tangente en M_0 à (\mathcal{C}) admet pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Cette tangente coupe (Ox) au point T_0 d'abscisse $x_{T_0} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Par suite,

$$M_0T_0^2 = \left(x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)\right)^2 + (f(x_0) - 0)^2 = \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)^2 + (f(x_0))^2.$$

Par suite,

$$\forall x \in I, MT = a \Leftrightarrow \forall x \in I, \left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2 + (f(x))^2 = a^2 \Leftrightarrow \forall x \in I, \frac{1}{(f'(x))^2} = \frac{a^2}{(f(x))^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, (f'(x))^2 = \frac{(f(x))^2}{a^2 - (f(x))^2} \Leftrightarrow \forall x \in I, \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / f'(x) = \varepsilon \frac{f(x)}{\sqrt{a^2 - (f(x))^2}}$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / \forall x \in I, f'(x) = \varepsilon \frac{f(x)}{\sqrt{a^2 - (f(x))^2}} \quad (E).$$

(Puisque f et f' ne s'annule pas sur I , la fonction ε est continue sur I et ne s'annule pas sur I . Elle garde donc un signe constant sur I d'après le théorème des valeurs intermédiaires ou encore ε ne dépend pas de x).

Résolvons alors l'équation (E).

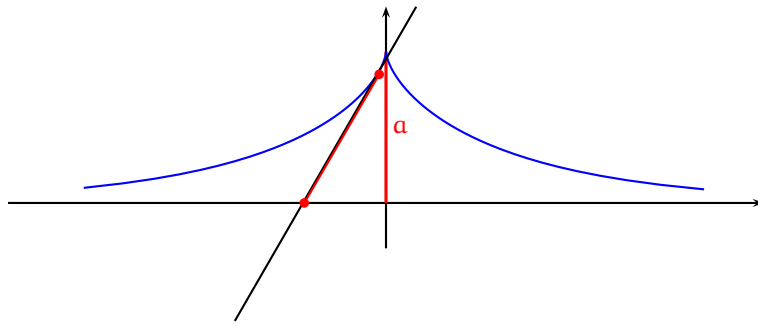
$$(E) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \varepsilon \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \Leftrightarrow \varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = dx.$$

Posons alors $y = a \sin t$ pour faire disparaître la racine carrée.

$$(E) \Leftrightarrow dx = \varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}}{a \sin t} a \cos t dt \Leftrightarrow dx = \varepsilon' a \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt \Leftrightarrow dx = \varepsilon' a \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) dt$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 + \varepsilon' a \left(\ln \left|\tan \frac{t}{2}\right| + \cos t\right).$$

On trouve les tractrices (n° 1, 5)) $\begin{cases} x = x_0 + \pm a \left(\ln \left|\tan \frac{t}{2}\right| + \cos t\right) \\ y = a \sin t \end{cases}$ qui réciproquement conviennent.



2) Soit $x_0 \in I$.

$$H_0 T_0^2 = \left(x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right) \right)^2 + (0 - 0)^2 = \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right)^2.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, HT = a &\Leftrightarrow \forall x \in I, \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / \forall x \in I, \varepsilon \frac{f(x)}{f'(x)} = a \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / \forall x \in I, f'(x) = \frac{\varepsilon}{a} f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}^*, \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / \forall x \in I, f(x) = K e^{\varepsilon x/a}. \end{aligned}$$

On trouve donc le graphe des fonctions $x \mapsto K e^{\varepsilon x/a}$, $K \in \mathbb{R}^*$.