Planche n° 33. Courbes en polaires. Corrigé

n° 1 : 1) (Lemniscate de Bernoulli.) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$.

Domaine d'étude. Notons D le domaine de définition de la fonction $r : \theta \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$.

• $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$ et pour $\theta \in D$,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$.

• $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et pour $\theta \in D$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

• $\theta \in D \Leftrightarrow \pi - \theta \in D$ et pour $\theta \in D$,

$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta), \pi - \theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis d'axe (Ox).

Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in D \Leftrightarrow \cos(2\theta) \geqslant 0 \Leftrightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On étudie donc la courbe sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

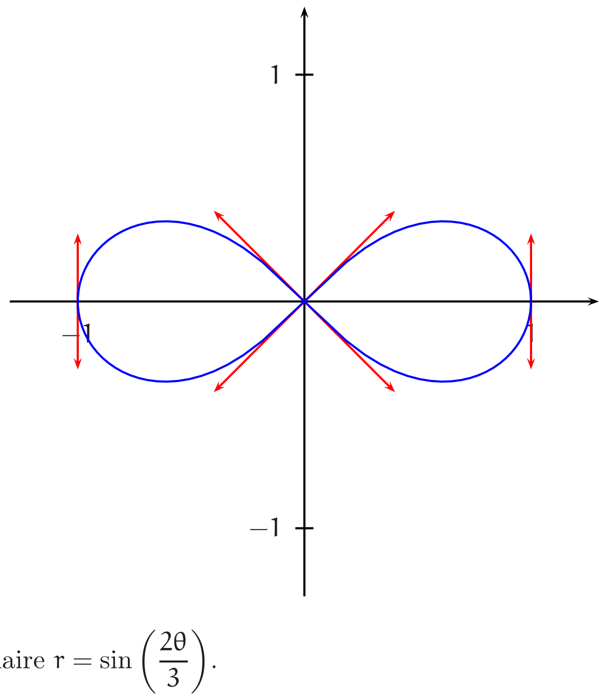
Variations et signe de r. La fonction r est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

Etude en $\frac{\pi}{4}$. $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = O$ et donc la tangente en $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ ou encore la droite d'équation $y = x$.

Etude en 0. $M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0)$. Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\overrightarrow{u}_\theta + \sqrt{\cos(2\theta)}\,\overrightarrow{v}_\theta \text{ et donc } \frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}(0) = \overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{j}.$$

$M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0)$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par $\overrightarrow{j}$



2) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

Domaine d'étude. • Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M(\theta + 6\pi) = [r(\theta + 6\pi), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi, 3\pi]$.
• Pour $\theta \in [-3\pi, 3\pi]$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [-r(\theta), -\theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

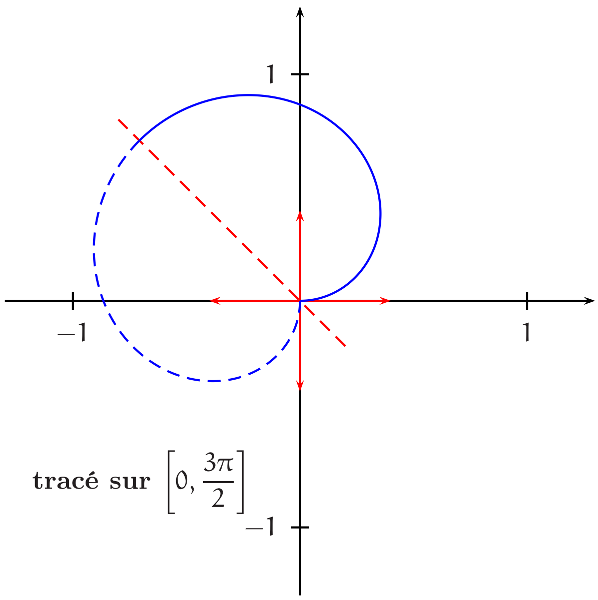
On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, 3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy).
• Pour $\theta \in [0, 3\pi]$, $M(3\pi - \theta) = [r(3\pi - \theta), 3\pi - \theta] = [-r(\theta), 3\pi - \theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis d'axe (Oy).
• Pour $\theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, $M\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) = \left[r\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right), \dfrac{3\pi}{2} - \theta\right] = \left[r(\theta), \dfrac{3\pi}{2} - \theta\right] = s_{y=-x}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axes la droite d'équation $y = -x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy).

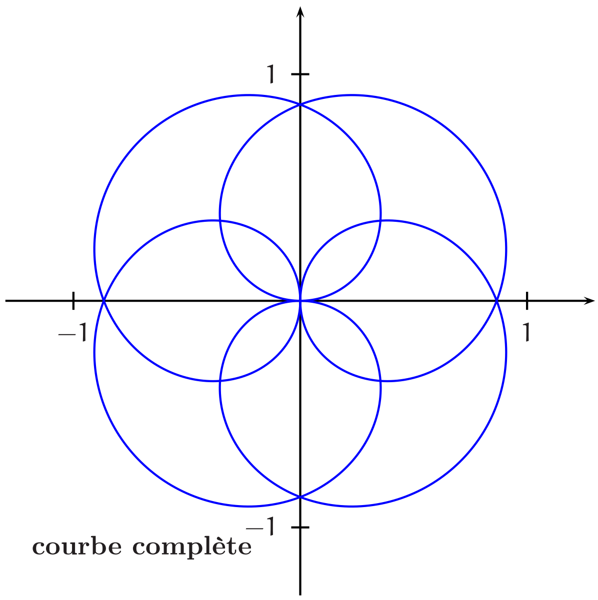
• **Remarque.** La fonction r admet 3π pour plus petite période strictement positive. Pourtant, on n'obtient pas la courbe complète quand θ décrit $[0, 3\pi]$ car 3π ne fournit pas un nombre entier de tours. Plus précisément,

$$M(\theta + 3\pi) = [r(\theta + 3\pi), \theta + 3\pi] = [r(\theta), \theta + \pi] = s_O(M(\theta)).$$

Variations et signe de r. La fonction r est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ et s'annule en 0. La fonction r est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

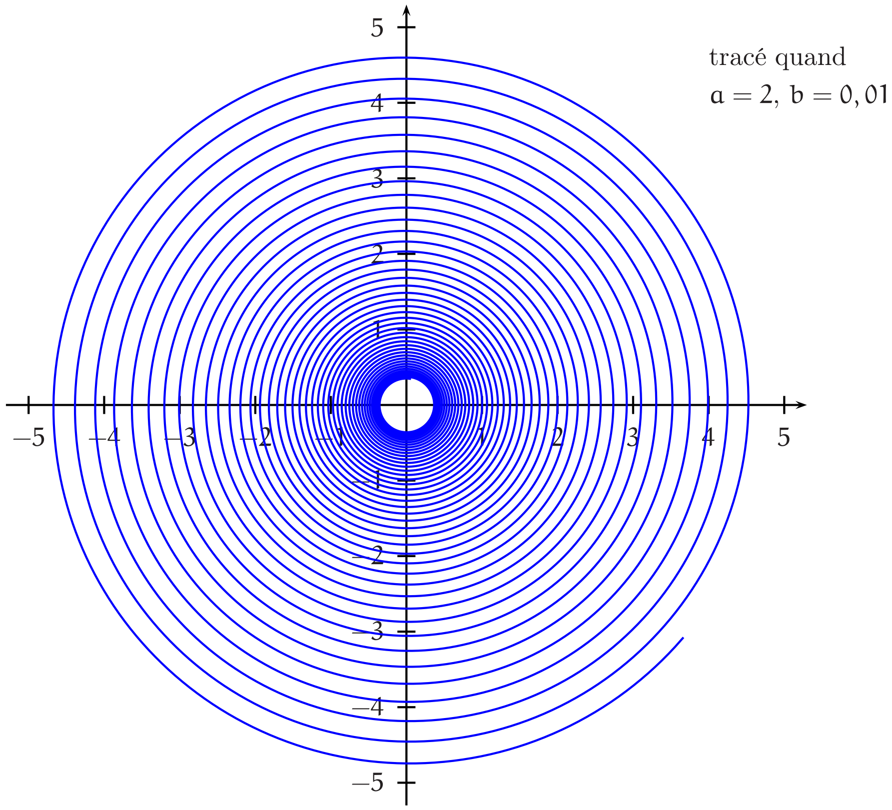
• $M(0)$ est le point O. La tangente en $M(0)$ est la droite passant par O d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox).





3) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = ae^{b\theta}$.

L'étude est très brève. La fonction $r : \theta \mapsto ae^{b\theta}$ est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Tout en tournant, on ne cesse de s'écarter de l'origine : la courbe est une spirale.

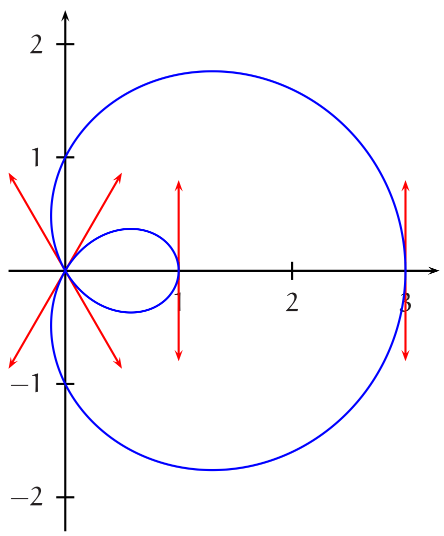


4) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = 2\cos(\theta) + 1$.

Domaine d'étude. • Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$.
• Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

Variations et signe de r. La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. La fonction r est strictement positive sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right[$, strictement négative sur $\left]\dfrac{2\pi}{3}, 0\right]$ et s'annule en $\dfrac{2\pi}{3}$. Donc la fonction $\theta \mapsto OM(\theta) = |r(\theta)|$ est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

• $M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ est le point O. La tangente en $M\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ est la droite passant par O d'angle polaire $\dfrac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire la droite d'équation $y = -\sqrt{3}x$.
• Par symétrie par rapport à (Ox), les tangentes en $M(0)$ et $M(\pi)$ sont parrallèles à (Oy).



5) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation polaire $r = \tan\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)$.

Domaine d'étude. Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta \mapsto \tan\left(\dfrac{2\theta}{3}\right)$.

• $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 6\pi \in D$ et $M(\theta+6\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi, 3\pi]$.

• $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et $M(-\theta) = s_{(Oy)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, 3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy).

• $\theta \in D \Leftrightarrow 3\pi - \theta \in D$ et $M(3\pi - \theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis par réflexion d'axe (Oy).

• $\theta \in D \Leftrightarrow \dfrac{3\pi}{2} - \theta \in D$ et

$$M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \left[-r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta\right] = \left[r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta\right] = s_{y=x}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe la droite d'équation $y = x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy).

• Pour $\theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$, $r(\theta)$ existe si et seulement si $\theta \neq \dfrac{3\pi}{4}$. On étudie donc sur $\theta \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right[$.

Variations et signe de r. La fonction r est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right[$, strictement positive sur $\left]0, \dfrac{3\pi}{4}\right[$ et s'annule en 0.

• La tangente en $M(0) = O$ est la droite passant par O et d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox).

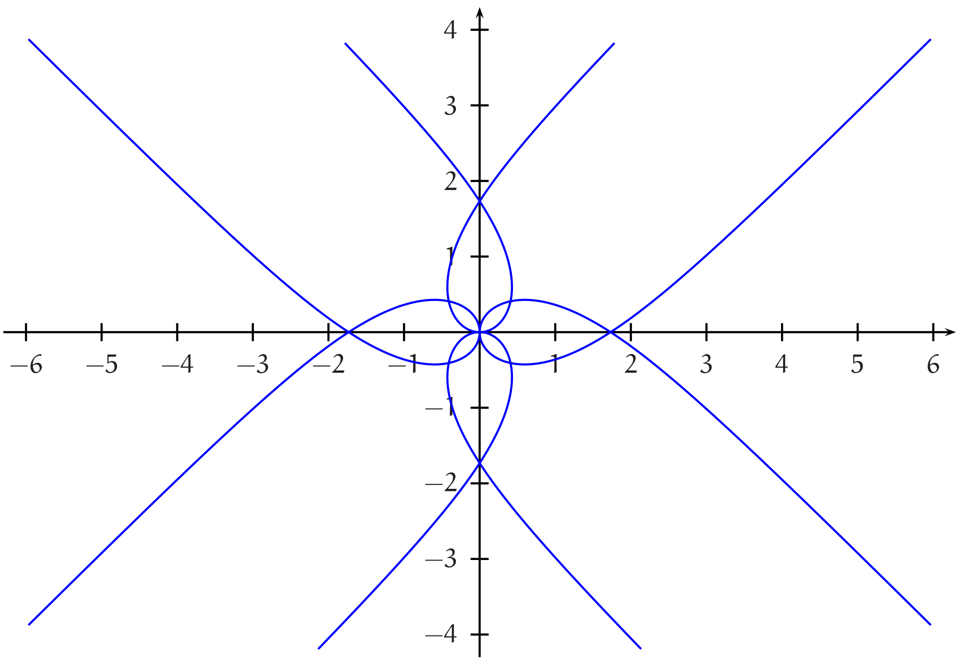
• **Etude quand θ tend vers $\dfrac{3\pi}{4}$.** Quand θ tend vers $\dfrac{3\pi}{4}$ par valeurs inférieures, $r(\theta)$ tend vers $+\infty$. la courbe admet donc une direction asymptotique d'angle polaire $\dfrac{3\pi}{4}$ ou encore d'équation $y = -x$.

Recherchons une éventuelle droite asymptote. Pour cela, étudions $\lim\limits_{\substack{\theta \to \frac{3\pi}{4} \\ \theta < \frac{3\pi}{4}}} r(\theta)\sin\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right)$. Posons $h = \dfrac{3\pi}{4} - \theta$ ou encore $\theta = \dfrac{3\pi}{4} - h$.

$$r(\theta)\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2h}{3}\right)\sin(-h) = -\operatorname{cotan} h \sin h = -\cos h \to -1.$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D) quand θ tend vers $\dfrac{3\pi}{4}$. De plus,

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{\frac{3\pi}{4}} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = -1 \Leftrightarrow y = -x + \sqrt{2}.$$



n° 2 : Domaine d'étude. Notons D le domaine de définition de la fonction $r\ :\ \theta \mapsto \dfrac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$.
$\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\theta\in D \Leftrightarrow \theta+2\pi\in D$ et $M(\theta+2\pi)=M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$. Pour $\theta\in[-\pi,\pi]$, $2\sin\theta+1=0\Leftrightarrow\theta\in\left\{-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right\}$. On étudie donc la courbe sur $[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

Signe de r.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos\theta+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2\sin\theta+1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de r		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Variations de r. La fonction r est dérivable sur $[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ et pour $\theta\in[-\pi,\pi]\setminus\left\{-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right\}$

$$r'(\theta)=\frac{-2\sin\theta(2\sin\theta+1)-2\cos\theta(2\cos\theta+1)}{(2\sin\theta+1)^2}=\frac{-4-2\cos\theta-2\sin\theta}{(2\sin\theta+1)^2}=\frac{-4-2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{(2\sin\theta+1)^2}<0.$$

La fonction r est strictement décroissante sur $\left[-\pi,-\dfrac{5\pi}{6}\right[$, sur $\left]-\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]-\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$.

Etude quand θ tend vers $-\dfrac{5\pi}{6}$. $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ x<-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{5\pi}{6}\\ x>-\frac{5\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $-\dfrac{5\pi}{6}$ ou encore d'équation $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$. Etudions maintenant l'existence d'une éventuelle droite asymptote et pour cela étudions $\lim\limits_{\theta\to-\frac{5\pi}{6}} r(\theta)\sin\left(\theta+\dfrac{5\pi}{6}\right)$.
On pose $h=\theta+\dfrac{5\pi}{6}$ ou encore $\theta=-\dfrac{5\pi}{6}+h$ de sorte que θ tend vers $-\dfrac{5\pi}{6}$ si et seulement si h tend vers 0. Quand h tend vers 0

$$r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}{2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}+h\right)+1}\sin h=\frac{(1-\sqrt{3}\cos h)+\sin h}{-\sqrt{3}\sin h+(1-\cos h)}\sin h\sim\frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}h}\times h=1-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D_1) quand θ tend vers $-\dfrac{5\pi}{6}$. De plus

$$M(x,y)\in(D_1)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{-\frac{5\pi}{6}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Etude quand θ tend vers $-\dfrac{\pi}{6}$. $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ x<-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{\theta\to-\frac{\pi}{6}\\ x>-\frac{\pi}{6}}} r(\theta)=+\infty$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique d'angle polaire $-\dfrac{\pi}{6}$ ou encore d'équation $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.
On pose ensuite $h=\theta+\dfrac{\pi}{6}$. Quand h tend vers 0

$$r(\theta)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\cos\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}{2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+h\right)+1}\sin h=\frac{(1+\sqrt{3}\cos h)+\sin h}{\sqrt{3}\sin h+(1-\cos h)}\sin h\sim\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}h}\times h=1+\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote (D_2) quand θ tend vers $-\dfrac{\pi}{6}$. De plus

$$M(x,y)\in(D_2)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{v}_{-\frac{\pi}{6}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tableau de variation de r.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$r'(\theta)$		$-$	$\Vert$		$-$		$\Vert$		$-$		
r	-1	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

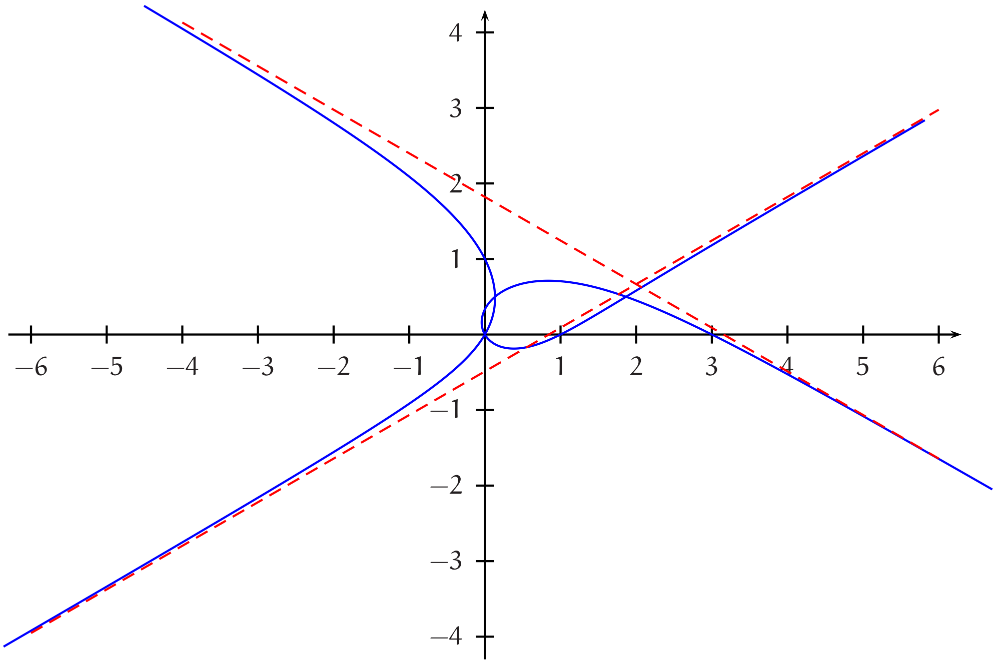
Recherche des points multiples. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \left([-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}\right)^2$ tel que $\theta_1 < \theta_2$. On suppose de plus que $\theta_1 \notin \left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ et $\theta_1 \notin \left\{\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$ de sorte que $M(\theta_1) \neq O$ et $M(\theta_2) \neq O$.

$$\begin{aligned}
M(\theta_1) = M(\theta_2) &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \text{ et } r(\theta_2) = r(\theta_1)) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ \theta_2 = \theta_1 + \pi + 2k\pi \text{ et } r(\theta_2) = -r(\theta_1))\\
&\Leftrightarrow \theta_1 \in [-\pi, 0],\ \theta_2 = \theta_1 + \pi \text{ et } r(\theta_2) = -r(\theta_1)\\
&\Leftrightarrow \theta_1 \in [-\pi, 0],\ \theta_2 = \theta_1 + \pi \text{ et } \frac{-2\cos(\theta_1) + 1}{-2\sin(\theta_1) + 1} = -\frac{2\cos(\theta_1) + 1}{2\sin(\theta_1) + 1}.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour $\theta \in [-\pi, 0] \setminus \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right\}$

$$\begin{aligned}
\frac{-2\cos(\theta) + 1}{-2\sin(\theta) + 1} = -\frac{2\cos(\theta) + 1}{2\sin(\theta) + 1} &\Leftrightarrow -4\cos(\theta)\sin(\theta) + 1 = 4\cos(\theta)\sin(\theta) - 1 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\theta \in \frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 2\theta \in \frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } \theta \in \frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \theta \in \left\{-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}\right\}.
\end{aligned}$$

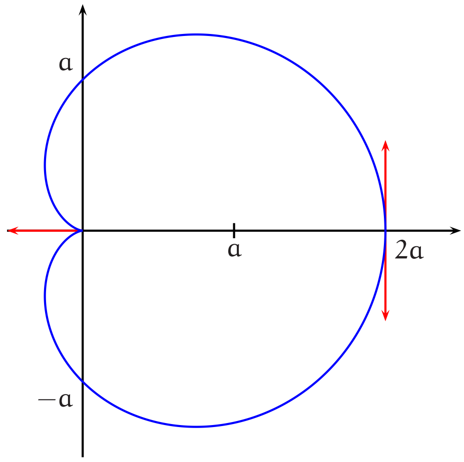
Ainsi, les points doubles distincts de l'origine sont $M\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = M\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $M\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = M\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Sinon, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = O$.



n° 3 : 1) Domaine d'étude. La fonction r est 2π-périodique et paire. Donc on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[0, \pi]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox).

Variations et signe de r. La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, strictement positive sur $]0, \pi]$ et s'annule en π.

Etude pour $\theta = \pi$. La tangente en $M(\pi) = O$ est la droite passant par O d'angle polaire π c'est-à-dire l'axe (Ox). Par symétrie par rapport à (Ox), le point $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce.



2) Soient $\theta \in [-\pi, \pi]$ puis $M = O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta$ le point de $\mathscr{C}$ de paramètre θ.

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} &= -a\sin\theta\overrightarrow{u}_\theta + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right)\\ &= 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right) = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Longueur ℓ de la cardioïde. On a $\left\|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = \left|2a\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right| = 2a\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ (pour $\theta \in [-\pi, \pi]$) et donc

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| d\theta = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\theta/2)\ d\theta = 4a\left[\sin(\theta/2)\right]_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

$$\boxed{\text{La cardioïde d'équation polaire } r = a(1+\cos\theta),\ a > 0, \text{ a pour longueur } 8a.}$$

Développée. Le point $M(\theta)$ est régulier si et seulement si $\theta \neq \pm\pi$. Dans ce cas,

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\| = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et aussi } \overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}}$$

En notant $\alpha(\theta)$ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\tau}(\theta)\right)$, on peut prendre $\alpha(\theta) = \dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$. En notant $R(\theta)$ le rayon de courbure au point $M(\theta)$,

$$R(\theta) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

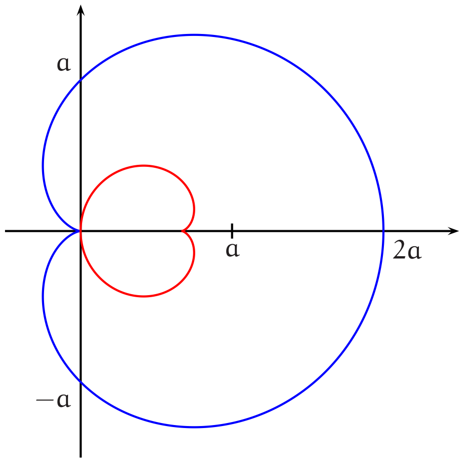
Ensuite, $\overrightarrow{n}(\theta) = r_{\pi/2}\left(\overrightarrow{\tau}(\theta)\right) = -\overrightarrow{u}_{3\theta/2}$ et donc, en notant $\Omega(\theta)$ le centre de courbure au point $M(\theta)$,

$$\begin{aligned}\Omega(\theta) &= M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta)\\ &= O + a(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta - \frac{4}{3}a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_{3\theta/2}\\ &= O + a(1+\cos\theta)\left(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}\right) - \frac{4}{3}a\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{i} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\overrightarrow{j}\right)\\ &= O + a\left[\left(\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \frac{2}{3}(\cos(\theta)+\cos(2\theta))\right)\overrightarrow{i} + \left(\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{2}{3}(\sin(\theta)+\sin(2\theta))\right)\overrightarrow{j}\right]\\ &= O + a\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos^2(\theta)\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{1}{3}\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\overrightarrow{j}\right]\\ &= O + \frac{2a}{3}\overrightarrow{i} + \frac{a}{3}(1-\cos\theta)\overrightarrow{u}_\theta\end{aligned}$$

Notons Γ la développée cherchée. On a $\Gamma = t\circ h(\mathscr{C}_1)$ où t est la translation de vecteur $\dfrac{2a}{3}\overrightarrow{i}$, h est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$ et $\mathscr{C}_1$ la courbe d'équation polaire $r = a(1-\cos\theta)$.
Maintenant, en notant r la fonction $\theta \mapsto a(1+\cos\theta)$ et r_1 la fonction $\theta \mapsto a(1-\cos\theta)$,

$$[r_1(\theta+\pi), \theta+\pi)] = [a(1+\cos\theta), \theta+\pi] = s_O([r(\theta), \theta)]).$$

La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc la symétrique par rapport à O de la courbe $\mathscr{C}$. En résumé, la développée de $\mathscr{C}$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la transformation $t \circ h \circ s_O$: c'est encore une cardioïde.



n° 4 : Soient $(R, \theta) \in \mathbb{R}^2$ puis M le point du plan dont un couple de coordonnées polaires est $[r, \theta]$.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow x^2(x^2+y^2) - (y-x)^2 = 0 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta \times r^2 - (r\sin\theta - r\cos\theta)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2[r^2\cos^2\theta - (\sin\theta - \cos\theta)^2] = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r^2 = \left(\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \text{ } (\cos\theta = 0 \text{ ne fournit pas de solution})$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = \tan\theta - 1 \text{ ou } r = 1 - \tan\theta.$$

$\mathscr{C}$ est donc la réunion de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ d'équation polaire $r = \tan\theta - 1$, $(\mathscr{C}_2)$ d'équation polaire $r = 1 - \tan\theta$ et $\{O\}$.

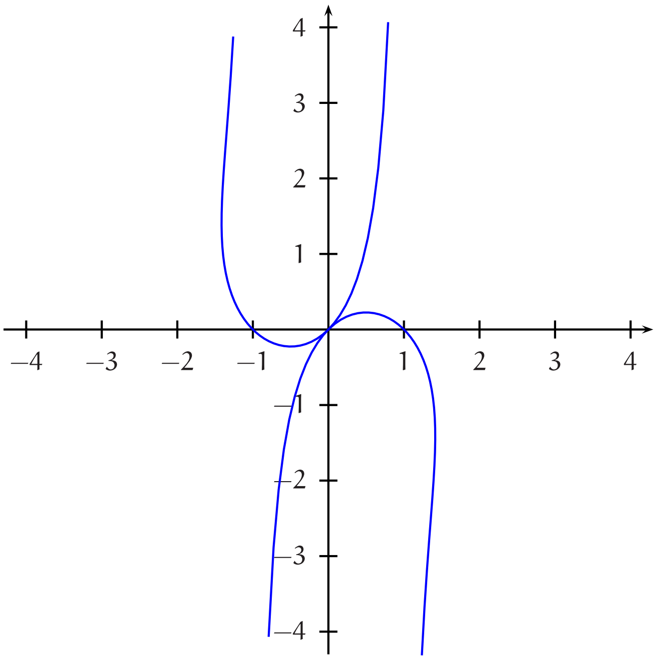
On note que le point O appartient à $(\mathscr{C}_1)$ car $\theta = \frac{\pi}{4}$ fournit $r = 0$. Donc $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \{O\} = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$. Ensuite, on notant r_1 et r_2 respectivement la fonction $\theta \mapsto \tan\theta - 1$ et $r_2 = -r_1$,

$$M[\theta+\pi, r_2(\theta+\pi)] = M[\theta+\pi, r_2(\theta)] = M[\theta+\pi, -r_1(\theta)] = M[\theta, r_1(\theta)],$$

et comme $\theta + \pi$ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si θ décrit $\mathbb{R}$, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont une seule et même courbe.

$\boxed{\mathscr{C} \text{ est la courbe d'équation polaire } r = \tan\theta - 1.}$

Construction de $\mathscr{C}$.



n° 5 : Développée. $M(\theta) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$ puis

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} = ae^{\theta}(\overrightarrow{u}_\theta + \overrightarrow{v}_\theta) = a\sqrt{2}e^{\theta}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right) = a\sqrt{2}e^{\theta}\overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit $\dfrac{ds}{d\theta} = a\sqrt{2}e^{\theta}$ et $\overrightarrow{\tau}(\theta) = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}$. On peut alors prendre $\alpha(\theta) = \theta + \dfrac{\pi}{4}$ et donc $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1$. Par suite

$$R(\theta) = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{a\sqrt{2}e^{\theta}}{1} = a\sqrt{2}e^{\theta}.$$

D'autre part, $\overrightarrow{n}(\theta) = \overrightarrow{\tau}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{3\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_\theta + \overrightarrow{v}_\theta)$ et donc

$$\Omega(\theta) = M(\theta) + R(\theta)\overrightarrow{n}(\theta) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + a\sqrt{2}e^{\theta}.\frac{1}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u}_\theta + \overrightarrow{v}_\theta) = O + ae^{\theta}\overrightarrow{v}_\theta = r_{O,\frac{\pi}{2}}(M(\theta)).$$

La développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r = ae^{\theta}$ est l'image de cette spirale par le quart de tour direct de centre O.