Planche n° 34. Etude métrique des courbes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : Longueur L de (Γ) dans chacun des cas suivants :

1) Γ est l'astroïde de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{array}\right.$ $(a > 0$ donné).

2) Γ est l'arche de cycloïde de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{array}\right.$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3) Γ est l'arc de parabole d'équation cartésienne $x^2 = 2py$, $0 \leq x \leq a$ $(p > 0$ et $a > 0$ donnés).

4) Γ est la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$ ($a > 0$ donné).

n° 2 : Déterminer et construire la développée

1) $\left\{\begin{array}{l} x = R\left(\cos t + \ln\left|\tan\dfrac{t}{2}\right|\right) \\ y = R\sin t \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{l} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{array}\right.$.

3) $y = x^3$

n° 3 : Trouver le point de la courbe d'équation $y = \ln x$ en lequel la valeur absolue du rayon de courbure est minimum.

n° 4 : Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(\cos x)$, pour $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'abscisse curviligne s quand O est l'origine des abscisses curvilignes et l'orientation est celle des x croissants. Trouver une relation entre R et s. Tracer (Γ) et sa développée.

n° 5 : Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note (Γ_λ) la courbe d'équation $y = \lambda x e^{-x}$. Quel est le lieu des centres de courbure C_λ en O à (Γ_λ) quand λ décrit $\mathbb{R}$.

