Planche n^{o} 35. Coniques

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n^{o} 1 : (*IT) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Eléments caractéristiques de la conique dont une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ est

1) **a)** $y^2 = x$, **b)** $y^2 = -x$, **c)** $y = x^2$, **d)** $y = -x^2$.

2) **a)** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, **b)** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, **c)** $x^2 + 2y^2 = 1$.

3) **a)** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, **b)** $-\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, **c)** $x^2 - y^2 = 1$.

n^{o} 2 : (*IT) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Eléménts caractéristiques de la courbe dont une équation dans $\mathscr{R}$ est

1) **a)** $y = x^2 + x + 1$, **b)** $y^2 + y - 2x = 0$, **c)** $y = \sqrt{2x + 3}$.

2) **a)** $x^2 + x + 2y^2 + y = 0$, **b)** $y = -2\sqrt{-x^2 + x}$.

3) $x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$.

n^{o} 3 : (IT)** Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Nature et éléments caractéristiques de la courbe dont une équation en repère orthonormé est

1) $y = \dfrac{1}{x}$ **2)** $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 = 0$ **3)** $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$

4) $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$ **5)** $x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$ **6)** $x(x - 1) + (y - 2)(y - 3) = 0$

7) $(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$ **8)** $(2x + y - 1)^2 - 3(x + y) = 0$

n^{o} 4 : (*IT) Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

$$\textbf{1)}\ r = \frac{1}{1 + 2\cos\theta} \quad \textbf{2)}\ r = \frac{1}{1 + \cos\theta} \quad \textbf{3)}\ r = \frac{1}{2 + \cos\theta} \quad \textbf{4)}\ r = \frac{1}{1 - \sin\theta} \quad \textbf{5)}\ r = \frac{1}{2 - \cos\theta}.$$

n^{o} 5 : (***) Déterminer l'image du cercle trigonométrique par la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{1 + z + z^2} \end{array}$.

n^{o} 6 : (**) Déterminer l'orthoptique d'une parabole , c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole, perpendiculaires l'une à l'autre.

n^{o} 7 : (***) **1) Droite de Simson.** Soit (A, B, C) un triangle et M un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R de M sur les cotés (BC), (CA) et (AB) du triangle (ABC) sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à (ABC). La droite passant par P, Q et R s'appelle la droite de Simson du point M relativement au triangle ABC (ou au cercle (ABC)).
2) Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle. Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. En particulier, fournir la construction des points de contacts.

n^{o} 8 : (**) $(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[A, B]$. (D) est la tangente en A à $(\mathscr{C})$. P est un point variable sur $(\mathscr{C})$ et (T) la tangente en P à $(\mathscr{C})$. (T) recoupe (D) en S. La perpendiculaire à (AB) passant par P coupe (BS) en M. Ensemble des points M ?

n^{o} 9 : (***) Soit, dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, la courbe (Γ) d'équations $\left\{\begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right.$.
Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

n^{o} 10 : (*) Que vaut l'excentricité de l'hyperbole équilatère (une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires) ?

n° 11 : (***) Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

n° 12 : (***) Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de $(\mathscr{H})$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $(\mathscr{H})$ en trois points formant un triangle équilatéral de centre P.

n° 13 : (***) Equation cartésienne de la parabole tangente à (Ox) en $(1, 0)$ et à (Oy) en $(0, 2)$.

