

Planche n° 35. Coniques. Corrigé

n°1 : On note \mathcal{C} la courbe considérée.

1) a) \mathcal{C} est la parabole de sommet O , d'axe focal (Ox) , de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les x positifs. Son foyer est le point $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ et sa directrice est $\mathcal{D} : x = -\frac{1}{4}$.

b) \mathcal{C} est la parabole de sommet O , d'axe focal (Ox) , de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les x négatifs. Son foyer est le point $F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ et sa directrice est $\mathcal{D} : x = \frac{1}{4}$.

c) \mathcal{C} est la parabole de sommet O , d'axe focal (Oy) , de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les y positifs. Son foyer est le point $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathcal{D} : y = -\frac{1}{4}$.

d) \mathcal{C} est la parabole de sommet O , d'axe focal (Oy) , de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les y négatifs. Son foyer est le point $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathcal{D} : y = \frac{1}{4}$.

2) a) \mathcal{C} est une ellipse, de centre O avec $a = 5 > 3 = b$ et donc d'axe focal (Ox) .

Ses sommets sont $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 3)$ et $B'(0, -3)$.

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$ et donc les foyers sont $F(4, 0)$ et $F'(-4, 0)$.

L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.

Les directrices ont pour équations respectives $x = \frac{a}{e} = \frac{25}{4}$ et $x = -\frac{25}{4}$.

b) \mathcal{C} est une ellipse, de centre O avec $a = 3 < 5 = b$ et donc d'axe focal (Oy) .

Ses sommets sont $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$, $B(0, 5)$ et $B'(0, -5)$.

$c = \sqrt{b^2 - a^2} = 4$ et donc les foyers sont $F(0, 4)$ et $F'(0, -4)$.

L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$.

Les directrices ont pour équations respectives $y = \frac{b}{e} = \frac{25}{4}$ et $y = -\frac{25}{4}$.

c) $x^2 + 2y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$.

\mathcal{C} est une ellipse, de centre O avec $a = 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} = b$ et donc d'axe focal (Ox) .

Ses sommets sont $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$, $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B'\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc les foyers sont $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Les directrices ont pour équations respectives $x = \frac{a}{e} = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.

3) a) \mathcal{C} est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a = 4$ et $b = 3$ et donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, puis $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

Les sommets sont $A(4, 0)$ et $A'(-4, 0)$ et les foyers sont $F(5, 0)$ et $F(-5, 0)$.

Les directrices sont les droites d'équations respectives $x = \frac{a}{e} = \frac{16}{5}$ et $x = -\frac{16}{5}$.

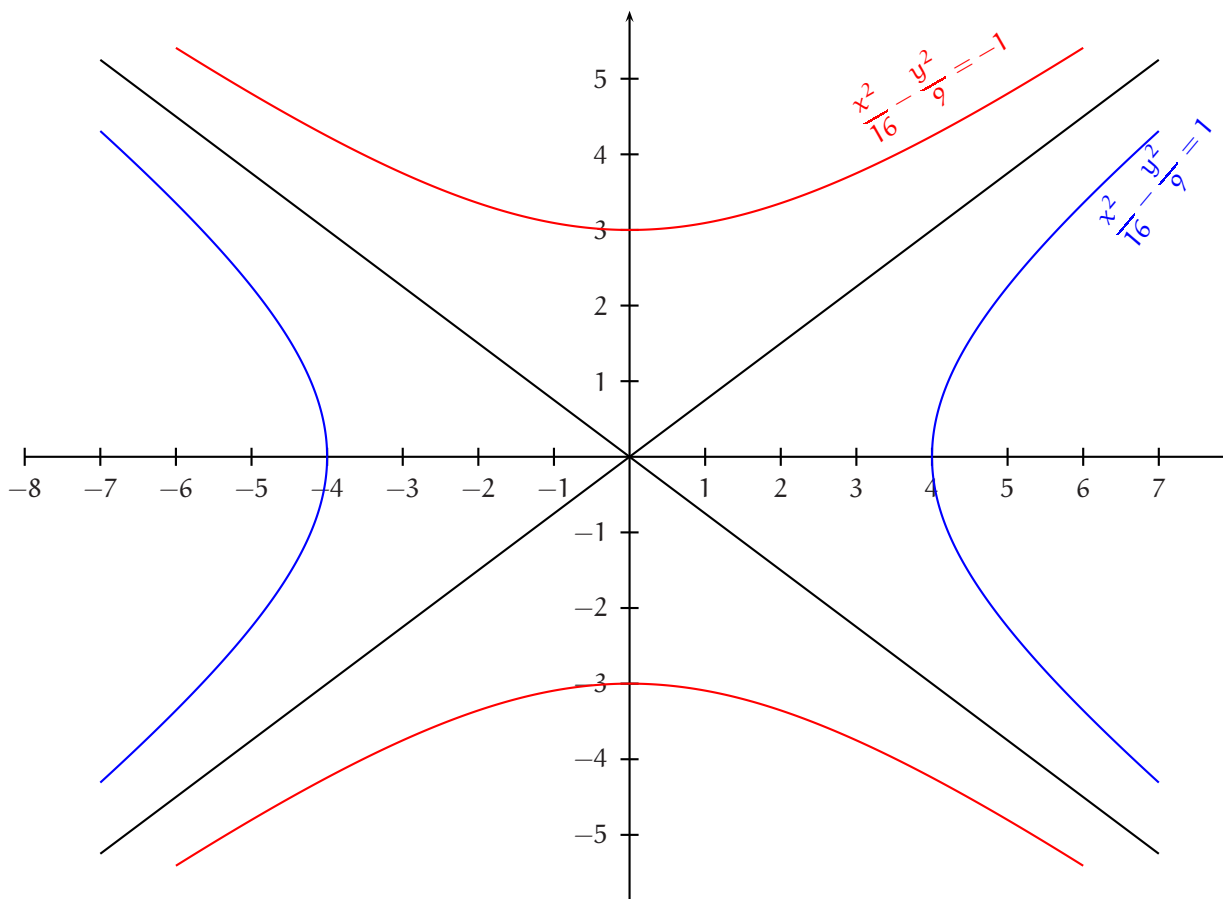
Les asymptotes sont les droites d'équations respectives $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$.

b) \mathcal{C} est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Oy) avec $a = 4$ et $b = 3$ et donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, puis $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$.

Les sommets sont $B(0, 3)$ et $B'(0, -3)$ et les foyers sont $F(0, 5)$ et $F(0, -5)$.

Les directrices sont les droites d'équations respectives $y = \frac{b}{e} = \frac{9}{5}$ et $y = -\frac{9}{5}$.

Les asymptotes sont les droites d'équations respectives $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$.



- c) \mathcal{C} est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a = b = 1$ et donc $c = \sqrt{2}$, puis $e = \sqrt{2}$.
 Les sommets sont A(1,0) et A'(-1,0) et les foyers sont F($\sqrt{2}$,0) et F(- $\sqrt{2}$,0).
 Les directrices sont les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
 Les asymptotes sont les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

n°2 :

1) a) $y = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{4}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

\mathcal{C} est la parabole de sommet S $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$, de paramètre $p = \frac{1}{2}$ et donc de foyer F $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ et de directrice d'équation $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

b) $y^2 + y - 2x = 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2x = 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x + \frac{1}{8}\right)$.

\mathcal{C} est la parabole de sommet S $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$, de paramètre $p = 1$ et donc de foyer F $\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\right)$ et de directrice d'équation $x = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8}$.

c) $y = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow y^2 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$ et $y \geq 0$. \mathcal{C} est une demi-parabole de sommet S $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, d'axe focal (Ox), de paramètre $p = 1$ et donc de foyer F $\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}, 0\right) = (-1, 0)$ et de directrice d'équation $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$.

2) a) $x^2 + x + 2y^2 + y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1$.

\mathcal{C} est une ellipse. Centre : $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. $a = \frac{\sqrt{3}}{8} > \frac{\sqrt{3}}{4} = b$. Axe focal : $y = -\frac{1}{4}$.

Sommets : A $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{4}\right)$, A' $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{4}\right)$, B $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et B' $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{Foyers : } F\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right) \text{ et } F'\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right). \quad \text{Directrices : } x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{b) } y = -2\sqrt{-x^2 + x} \Leftrightarrow y^2 = 4(-x^2 + x) \text{ et } y \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} + y^2 = 1 \text{ et } y \leq 0.$$

\mathcal{C} est une demi-ellipse. Centre : $(\frac{1}{2}, 0)$. $a = \frac{1}{2} < 1 = b$. Axe focal : $x = 0$.

Sommets : $A(1, 0)$, $A'(0, 0)$ et $B'(\frac{1}{2}, -1)$.

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Foyers : } F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } F'\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad \text{Directrices : } y = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } y = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{3) } x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -1.$$

\mathcal{C} est une hyperbole de centre $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et d'axe focal la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$. $a = b = 1$.

Sommets : $B(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $B'(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \text{ puis } e = \frac{c}{b} = \sqrt{2}. \quad \text{Foyers : } F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) \text{ et } F'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right). \quad \text{Directrices : } y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } y = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Asymptotes : $y = x + 1$ et $y = -x$.

n°3 : 1) On note \mathcal{H} l'hyperbole considérée. On tourne de $\frac{\pi}{4}$. Pour cela, on pose $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$. On a alors

$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(X - Y)(X + Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Ainsi, si \mathcal{R} est le repère orthonormé initial (O, \vec{i}, \vec{j}) et \mathcal{R}' est le repère (O, \vec{I}, \vec{J}) où $\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$, une équation de \mathcal{H} dans \mathcal{R} est $xy = 1$ et une équation de \mathcal{H} dans \mathcal{R}' est $\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$. On obtient $a = b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ et $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

Les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$ et les formules inverses s'écrivent

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y) \end{cases} \quad (\text{dans ce qui suit, les coordonnées d'un point dans } \mathcal{R}' \text{ seront notées avec } \mathcal{R}' \text{ en indice alors que}$$

les coordonnées dans \mathcal{R} seront notées sans écrire \mathcal{R} en indice).

Centre $O(0, 0)$.

Asymptotes : bien sûr, les axes (Ox) et (Oy) .

Axe focal : l'axe (OX) ou encore la droite d'équation $y = x$ (dans \mathcal{R}).

Sommets : $A(\sqrt{2}, 0)_{\mathcal{R}'}$, $A'(-\sqrt{2}, 0)_{\mathcal{R}'}$ et donc $\boxed{\text{Sommets } A(1, 1) \text{ et } A'(-1, -1)}$.

Foyers : $F(2, 0)_{\mathcal{R}'}$, $F'(-2, 0)_{\mathcal{R}'}$ et donc $\boxed{\text{Foyers } F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ et } F'(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$.

Directrices : les droites d'équations $X = \pm \frac{a}{e} = \pm 1$ et donc dans \mathcal{R} , les droites d'équations respectives $x + y = \pm\sqrt{2}$.

2) Le discriminant de cette conique vaut $41 \times 34 - 12^2 = 1250 > 0$. Il s'agit donc d'une conique du genre ellipse.

On pose $\begin{cases} x = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y \\ y = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y \end{cases}$ et on détermine θ (ou plutôt $\cos\theta$ et $\sin\theta$) de sorte que le terme en XY disparaisse. Mais, le coefficient de XY dans

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 = 41(\cos(\theta)X - \sin(\theta)Y)^2 - 24(\cos(\theta)X - \sin(\theta)Y)(\sin(\theta)X + \cos(\theta)Y) + 34(\sin(\theta)X + \cos(\theta)Y)^2,$$

vaut

$$-82 \cos \theta \sin \theta - 24(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 68 \cos \theta \sin \theta = -24(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 14 \cos \theta \sin \theta.$$

Ce coefficient est nul si et seulement si $-12 \cos^2 \theta + 12 \sin^2 \theta - 7 \cos \theta \sin \theta = 0$ ou encore, après division par $\cos^2 \theta$, $12 \tan^2 \theta - 7 \tan \theta - 12 = 0$. On peut alors prendre $\tan \theta = \frac{4}{3}$, puis on peut prendre $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{3}{5}$ et

$$\sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{3}{5} \frac{4}{3} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Posons donc } \begin{cases} x = \frac{3X - 4Y}{5} \\ y = \frac{4X + 3Y}{5} \end{cases} (*). \text{ On a alors}$$

$$\begin{aligned} 41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 &= \frac{1}{25}(41(3X - 4Y)^2 - 24(3X - 4Y)(4X + 3Y) + 34(4X + 3Y)^2 \\ &\quad - 530(3X - 4Y) + 460(4X + 3Y) + 1850) \\ &= \frac{1}{25}(625X^2 + 1250Y^2 + 250X + 3500Y + 1850) \\ &= 25 \left(X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25} \right) \end{aligned}$$

Une équation de la courbe dans le repère défini par (*) est donc $X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25} = 0$. Ensuite,

$$X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25} = 0 \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(Y + \frac{7}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(X + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{\left(Y + \frac{7}{5}\right)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

\mathcal{C} est une ellipse. On trouve $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$ $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis

Centre $\Omega(1, -1)$. Axe focal : $3x + 4y + 1 = 0$ et axe non focal : $-4x + 3y + 7 = 0$.

Sommets : $A\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $A'\left(\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, $B\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{5}, -1 + \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ et $B'\left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{5}, -1 - \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$.

Foyers : $F\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ et $F'\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. Directrices : $4x - 3y + 3 = 0$ et $4x - 3y + 17 = 0$.

$$3) \ x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2. \text{ On pose donc } \begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2Y^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(X + Y) - \frac{2}{\sqrt{2}}(-X + Y) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(Y + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}X + \frac{15}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(Y + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(X + \frac{3}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

\mathcal{C} est une parabole de paramètre $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$.

Sommet : $S\left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$. Axe focal : $x + y + \frac{1}{4} = 0$.

Foyer : $F\left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$. Directrice : $x - y - \frac{1}{4} = 0$.

4) \mathcal{C} est le point d'intersection des droites d'équation $x - y + 1 = 0$ et $x + y - 1 = 0$ c'est-à-dire le point de coordonnées $(0, 1)$.

5) $x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ et donc \mathcal{C} est vide.

6) $x(x - 1) + (y - 2)(y - 3) = 0$ est une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0, 2)$ et $B(1, 3)$.

7) Si on pose $\begin{cases} X = x + y + 1 \\ Y = x - y + 3 \end{cases}$, on effectue un changement de repère non orthonormé. Dans le nouveau repère, \mathcal{C} admet pour équation cartésienne $XY = 3$ et donc \mathcal{C} est une hyperbole. Avec le changement de repère effectué, on obtient directement les éléments affines de cette hyperbole mais pas ses éléments métriques : hyperbole d'asymptotes les droites d'équations $x + y + 1 = 0$ et $x - y + 3 = 0$ et donc de centre $(-2, 1)$.

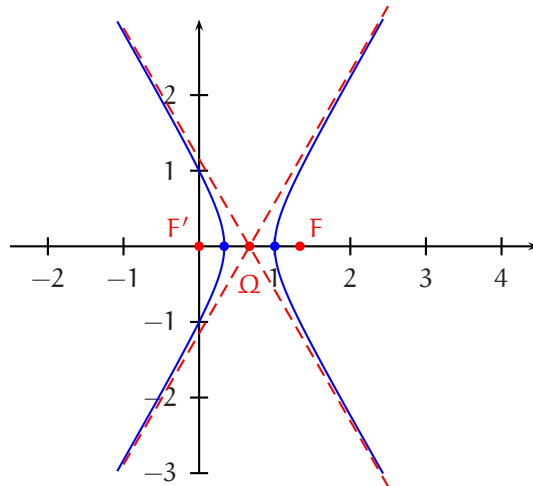
Pour obtenir l'axe focal, l'excentricité, les foyers et les directrices il faut faire un changement de repère orthonormé.

8) Si on pose $\begin{cases} X = 2x + y + 1 \\ Y = 3x + 3y \end{cases}$, \mathcal{C} admet pour équation cartésienne dans le nouveau repère $Y = X^2$ et donc \mathcal{C} est une parabole. Pour obtenir ces éléments métriques, il faut un changement de repère orthonormé.

n°4 : Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

$$1) r = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta} \quad 2) r = \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad 3) r = \frac{1}{2 + \cos \theta} \quad 4) r = \frac{1}{1 - \sin \theta} \quad 5) r = \frac{1}{2 - \cos \theta}.$$

1) \mathcal{C} est une conique d'excentricité 2 et donc une hyperbole.



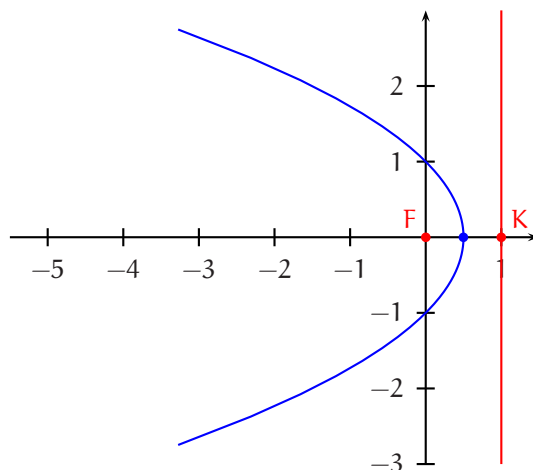
L'axe focal est (Ox) . Les sommets sont les points d'intersection de \mathcal{C} et (Ox) c'est-à-dire les points $M(0)$ et $M(\pi)$ de coordonnées cartésiennes respectives $A' \left(\frac{1}{3}, 0 \right)$ et $A(1, 0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ c'est-à-dire $\Omega \left(\frac{2}{3}, 0 \right)$.

L'un des foyers est $F' = O$ et l'autre est le symétrique de F' par rapport à Ω : c'est le point $F \left(\frac{4}{3}, 0 \right)$. Puisque $a = \frac{1}{3}$ et

$e = 2$, les directrices sont les droites d'équation $x = x_{\Omega} - \frac{a}{e} = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{5}{6}$.

Les branches infinies sont obtenues pour $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$. Les asymptotes sont donc les droites passant par Ω d'angle polaire $\pm \frac{2\pi}{3}$. Ce sont les droites d'équations cartésiennes $y = \pm \sqrt{3} \left(x - \frac{2}{3} \right)$.

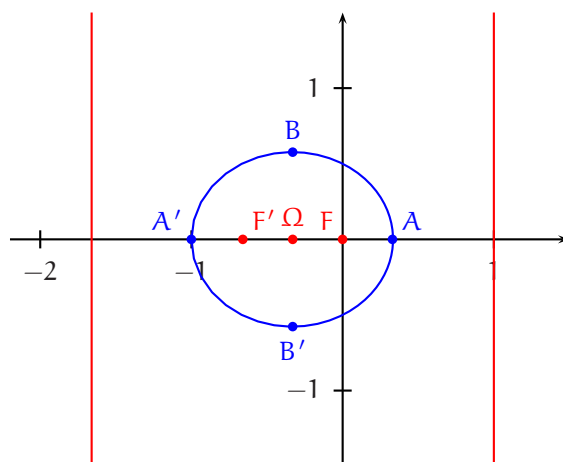
2) \mathcal{C} est une conique d'excentricité 1 et donc une parabole.



L'axe focal est (Ox) . Le sommet est le point $M(0)$ de coordonnées cartésiennes $S \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$.

Le foyer est $F = O$. Le point K est le symétrique de F par rapport à S et a pour coordonnées $(1, 0)$. La directrice a donc pour équation $x = 1$.

3) \mathcal{C} est une conique d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ et donc une ellipse.



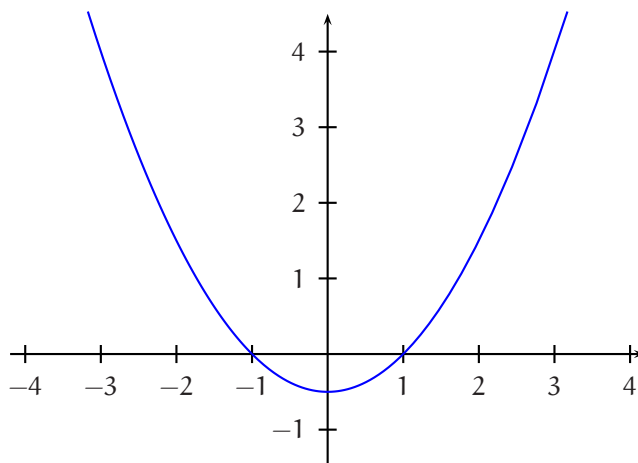
L'axe focal est (Ox) . Les sommets sur cet axe sont $A = M(0)$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ et $A' = M(\pi)$ de coordonnées $(-1, 0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ et a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

L'un des foyers est $F = O$. L'autre est le symétrique de F par rapport à Ω : c'est le point F' de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$. Par

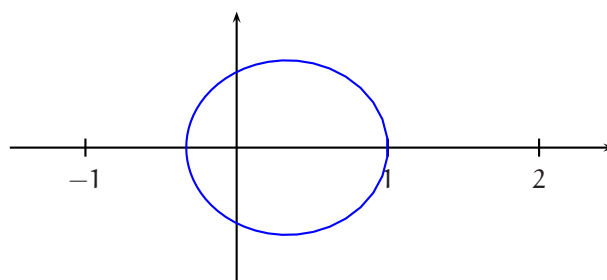
suite, $c = \frac{1}{3}$ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où les sommets $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Les directrices sont les droites d'équations $x = x_\Omega + \frac{a}{e} = 1$ et $x = -\frac{5}{3}$.

4) $M\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \left[r\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \theta - \frac{\pi}{2}\right] = \left[\frac{1}{1 + \cos\theta}, \theta - \frac{\pi}{2}\right] = \text{rot}_{O, -\pi/2} \left(\left[\frac{1}{1 + \cos\theta}, \theta\right]\right)$. Donc \mathcal{C} est l'image de la parabole d'équation polaire $r = \frac{1}{1 + \cos\theta}$ par le quart de tour indirect de centre O .



5) $M(\theta + \pi) = [r(\theta + \pi), \theta + \pi] = \left[\frac{1}{2 + \cos\theta}, \theta + \pi\right] = s_O \left(\left[\frac{1}{2 + \cos\theta}, \theta\right]\right)$. Donc \mathcal{C} est l'image de l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{2 + \cos\theta}$ par la symétrie centrale de centre O .



n°5 : Un point du plan est sur le cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si son affixe z est de module 1 ou encore si et seulement si il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Or, pour θ réel,

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + 1 + e^{-i\theta}} = \overline{\left(\frac{e^{i\theta}}{1 + 2\cos\theta}\right)}.$$

L'ensemble cherché est donc la symétrique par rapport à (Ox) de la courbe d'équation polaire $r = \frac{1}{1 + 2\cos\theta}$. Cette dernière est une ellipse, symétrique par rapport à (Ox) . Donc l'ensemble cherché est l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{1 + 2\cos\theta}$ (voir n° 4, 1)).

n°6 : Dans un certain repère orthonormé, la parabole \mathcal{P} admet une équation cartésienne de la forme $x^2 = 2py$. D'après la règle de dédoublement des termes, une équation de la tangente \mathcal{T}_{x_0} en un point $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{x_0^2}{2p}\right)$ de \mathcal{P} est

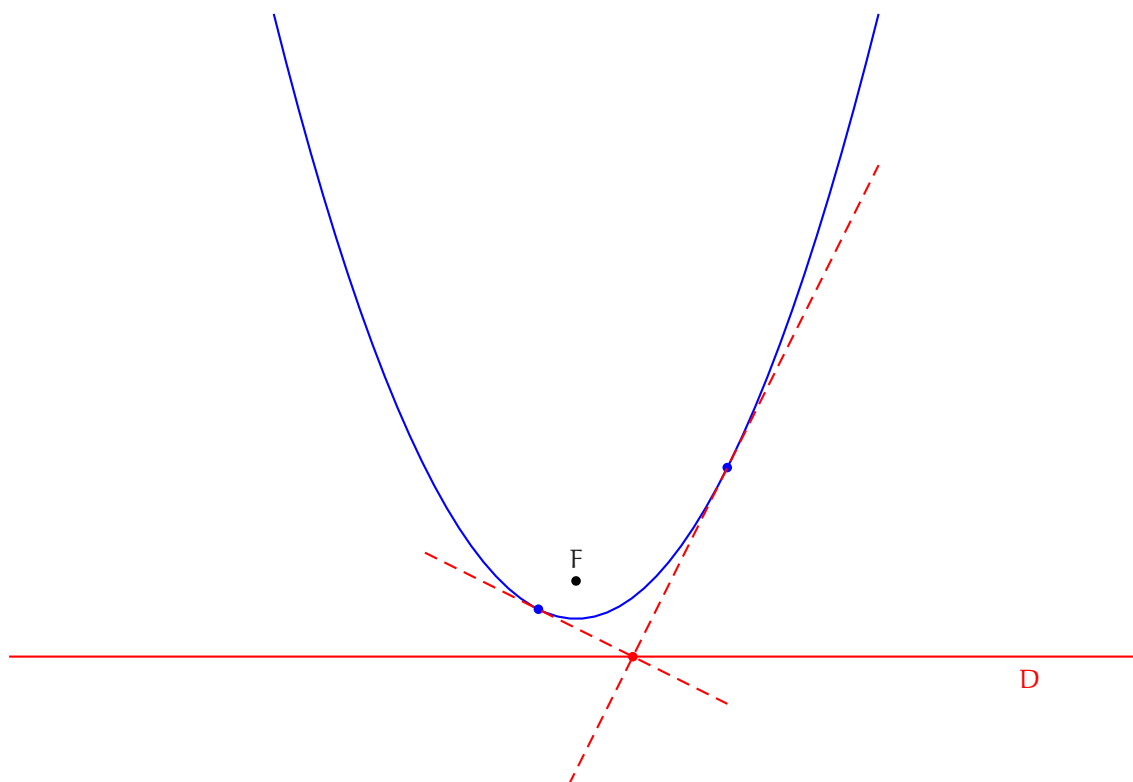
$$xx_0 = p(y + y_0).$$

Les tangentes en $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$ sont perpendiculaires si et seulement si $x_0x_1 + p^2 = 0$. L'orthoptique \mathcal{C} est donc l'ensemble des points d'intersection de \mathcal{T}_{x_0} et \mathcal{T}_{-p^2/x_0} où x_0 décrit \mathbb{R}^* .

$$\begin{aligned} M(x, y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} xx_0 = p\left(y + \frac{x_0^2}{2p}\right) \\ -x\frac{p^2}{x_0} = p\left(y + \frac{p^3}{2x_0^2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} tx - py = \frac{t^2}{2} \\ px + ty = -\frac{p^3}{2t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + p^2} \left(\frac{t^3}{2} - \frac{p^4}{2t}\right) \\ y = \frac{1}{t^2 + p^2} \left(-\frac{p^3}{2} - \frac{pt^2}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} x = \frac{t^2 - p^2}{2t} \\ y = -\frac{p}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Maintenant, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 - p^2}{2t} = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - p^2}{2t} = +\infty$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{t^2 - p^2}{2t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, quand t décrit $]0, +\infty[$, $x = \frac{t^2 - p^2}{2t}$ décrit \mathbb{R} . Finalement, l'orthoptique \mathcal{C} est la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$ ou encore

l'orthoptique d'une parabole est sa directrice.



n°7 : 1) Soit M un point du plan.

1er cas. Supposons que $M \notin (AB) \cup (AC) \cup (BC)$.

$$P, Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = 0 \text{ } [\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}) \text{ } [\pi].$$

Maintenant, puisque les triangles MPC et MQC sont rectangles en P et Q respectivement, les points P et Q sont sur le cercle de diamètre [MC]. On en déduit que $(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}) = (\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}) \text{ } [\pi]$. De même, $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}) = (\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}) \text{ } [\pi]$. Par suite,

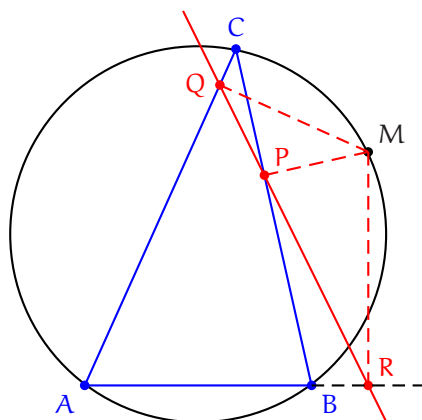
$$\begin{aligned} P, Q \text{ et } R \text{ alignés} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}) \text{ } [\pi] \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) \text{ } [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A, B \text{ et } C). \end{aligned}$$

2ème cas. Supposons par exemple que $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = R$. Si de plus M n'est ni A, ni B, alors $M \neq P$ et $M \neq Q$ puis les droites (MP) et (MQ) sont perpendiculaires aux droites (BC) et (AC) respectivement. Si par l'absurde, les points P, Q et R sont alignés, on a $(MP) = (MQ)$ et donc $(AB) \parallel (AC)$. Ceci est une contradiction.

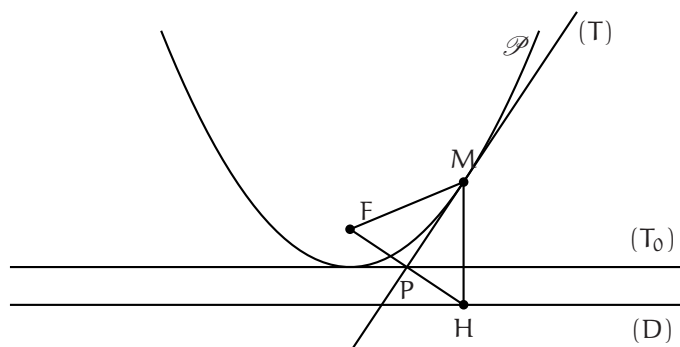
Donc, si les points P, Q et R sont alignés, M est l'un des trois points A, B ou C. La réciproque est immédiate.

En résumant les deux cas,

P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.



2) **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle FMH est isocèle en M et la tangente en M à \mathcal{P} est la médiatrice du segment [FH]. Par suite, le projeté orthogonal P de F sur la tangente (T) est sur $5T_0$ la tangente au sommet de la parabole \mathcal{P} .

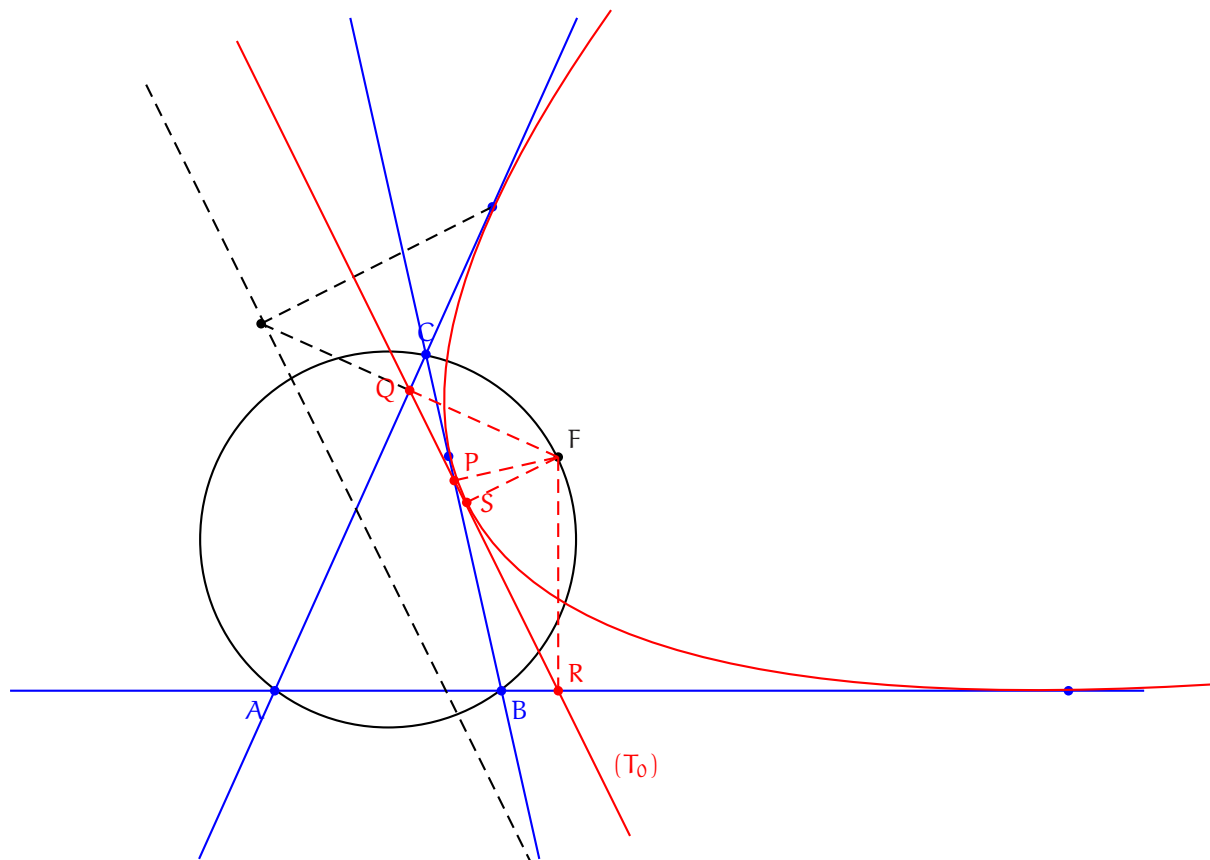


Soient A, B et C trois points non alignés. Si \mathcal{P} est une parabole tangente aux droites (BC), (CA) et (AB), les projetés orthogonaux P, Q et R de son foyer F sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole \mathcal{P} . D'après 1), le point F est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Réciproquement, si F est l'un des trois points A, B ou C, F n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer.

Soit donc F un point du cercle circonscrit au triangle ABC et distinct des points A , B et C . Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer F , tangente aux droites (BC) , (CA) et (AB) .

On construit les projetés orthogonaux P , Q et R de F sur les droites (BC) , (CA) et (AB) . Ils sont alignés sur la droite de SIMSON (T_0) de F relativement au triangle ABC . La parabole de foyer F et de tangente au sommet (T_0) est solution du problème posé. La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de F par rapport aux points P , Q et R (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à (T_0) jusqu'à la parabole.



n°8 : On choisit un repère orthonormé dans lequel A a pour coordonnées $(R, 0)$ et (\mathcal{C}) a pour représentation paramétrique

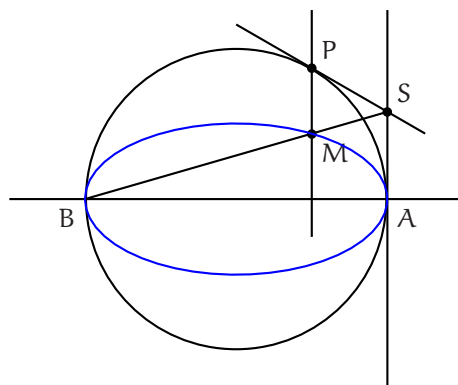
$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Soit } P(R \cos t, R \sin t) \text{ un point de } (\mathcal{C}).$$

La tangente (D) à (\mathcal{C}) en A est la droite d'équation $x = R$ et la tangente (T) à (\mathcal{C}) en P est la droite d'équation $x \cos t + y \sin t = R$. Quand $t \notin \pi\mathbb{Z}$, (T) recoupe (D) en le point S de coordonnées $\left(R, R \frac{1 - \cos t}{\sin t}\right)$ ou encore $\left(R, R \tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

Une équation de la droite (BS) est $-\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x + R) + 2y = 0$. L'abscisse de M est $R \cos t$ et donc

$$y_M = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{t}{2}\right)(x_M + R) = \frac{1}{2} R \tan\left(\frac{t}{2}\right)(\cos t + 1) = R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} R \sin t.$$

L'ensemble des points M est donc le support de l'arc $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = \frac{1}{2} R \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C'est l'image du cercle \mathcal{C} dans l'affinité de base (AB) , de direction (D) et de rapport $\frac{1}{2}$ et donc une ellipse de grand axe $[AB]$.



n°9 : On choisit un repère orthonormé $\mathcal{R}_1 = (O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que le plan d'équation $x + y + z = 1$ dans \mathcal{R} soit le plan d'équation $Z = 0$ dans \mathcal{R}_1 .

On prend $O' = (1, 0, 0)$ puis $\vec{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et enfin $\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Les formules de changement de repère s'écrivent

$$\begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1 \\ y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ensuite, soit M un point de l'espace dont les coordonnées dans \mathcal{R} sont notées (x, y, z) et les coordonnées dans \mathcal{R}_1 sont notées (X, Y, Z) .

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right) + 1 \\ Z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 1\right)^2 + \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On travaille maintenant en dimension 2 et on note encore \mathcal{R}_1 le repère (O', \vec{i}, \vec{j}) . Une équation de (Γ) dans \mathcal{R}_1 est

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0 \text{ ou encore } \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0.$$

On pose $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2} \\ y' = -\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}Y}{2} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2} \\ Y = \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2} \end{cases}$ et on note $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ le nouveau repère défini par ces formules.

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}} \left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{7x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(y' + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

(Γ) est une parabole de paramètre $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$.

Eléments de (Γ) dans \mathcal{R}' : sommet $S \left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{R}'}$, axe : $x' = -\frac{21}{4\sqrt{6}}$, foyer $F \left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{R}'}$, directrice : $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Eléments de (Γ) dans \mathcal{R}_1 en repassant à trois coordonnées : sommet $S \left(-\frac{41}{16\sqrt{2}}, -\frac{45}{16\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathcal{R}_1}$, axe : $\begin{cases} \sqrt{3}X + Y = -\frac{21}{2\sqrt{6}} \\ Z = 0 \end{cases}$,

foyer $F \left(-\frac{11}{4\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathcal{R}_1}$, directrice : $\begin{cases} -X + \sqrt{3}Y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Z = 0 \end{cases}$.

Eléments de (Γ) dans \mathcal{R} : sommet $S \left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right)_{\mathcal{R}}$, axe : $\begin{cases} 8x - 4y - 4z + 21 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, foyer $F \left(-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, 10\right)_{\mathcal{R}}$, directrice :

$$\begin{cases} 2y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

n°10 : Soit \mathcal{H} une hyperbole. Il existe un repère orthonormé dans lequel \mathcal{H} admet une équation catésienne de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > 0$, $b > 0$).

Dans ce repère, les asymptotes ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{b}{a} \left(-\frac{b}{a}\right)^2 = -1$ ou encore si et seulement si $a = b$. L'excentricité de \mathcal{H} est alors

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut $\sqrt{2}$.

n°11 : Notons \mathcal{C} l'ensemble des points considérés. Pour x réel, posons $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

$$\begin{aligned} P(x) = P(y) &\Leftrightarrow (x^3 - y^3) + A(x^2 - y^2) + B(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)((x^2 + xy + y^2) + A(x + y) + B) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ ou } x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0. \end{aligned}$$

\mathcal{C} est donc la réunion de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe \mathcal{E} d'équation $x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0$. Pour déterminer la nature de \mathcal{E} , on fait un changement de repère orthonormé en posant

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((X - Y)^2 + (X - Y)(X + Y) + (X + Y)^2) + \frac{A}{\sqrt{2}}X + B = 0 \\ &\Leftrightarrow 3X^2 + Y^2 + \sqrt{2}AX + 2B = 0 \Leftrightarrow 3\left(X + \frac{A\sqrt{2}}{6}\right)^2 + Y^2 = \frac{A^2 - 12B}{6} \quad (*) \end{aligned}$$

\mathcal{E} est une ellipse si et seulement si $A^2 - 12B > 0$ (sinon \mathcal{E} est un point ou est vide). Dans ce cas, puisque $a = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 = b$,

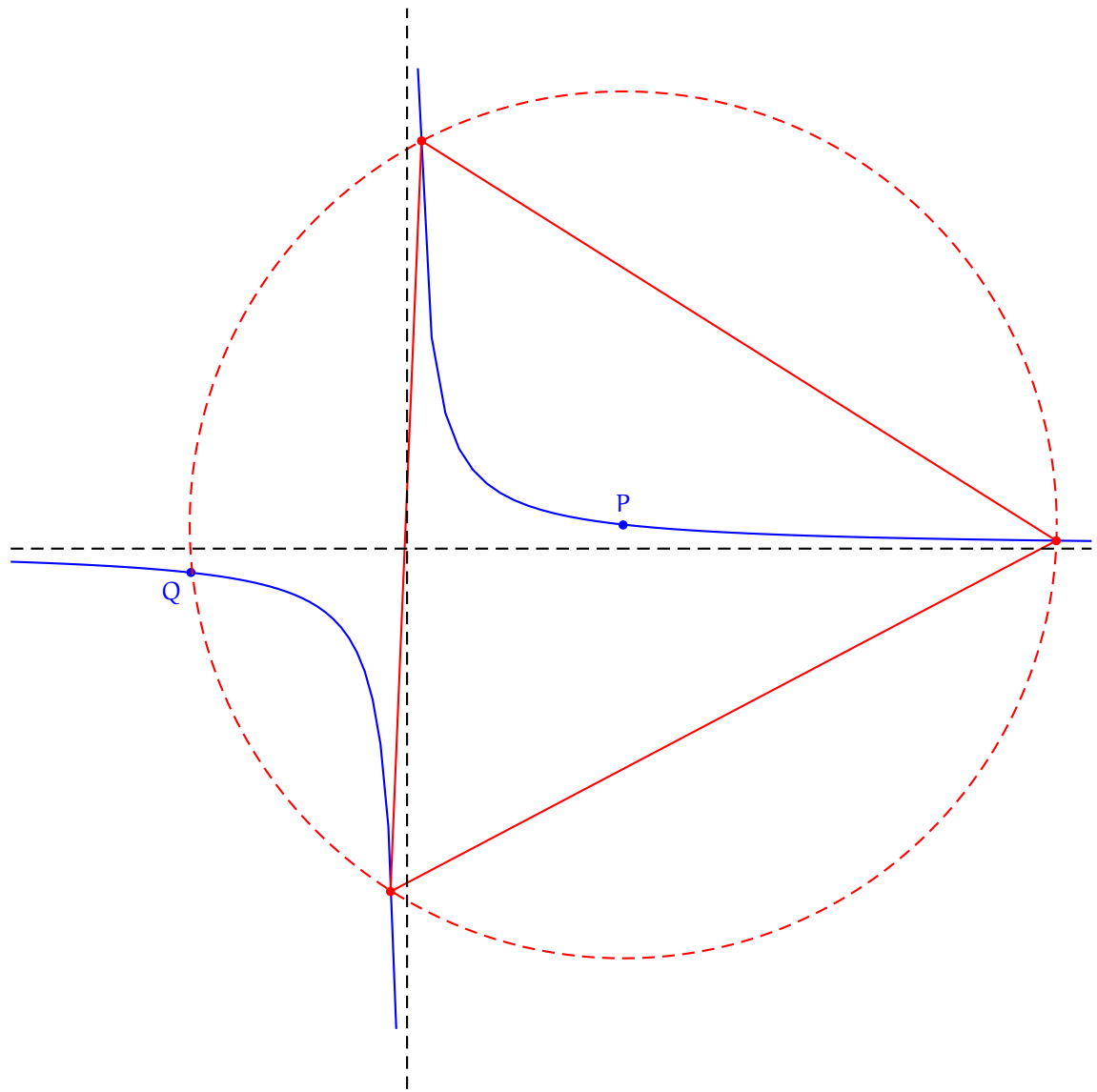
$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

n°12 : On choisit un repère orthonormé dans lequel P a pour coordonnées (a, b) , $a > 0$, $b > 0$ et l'hyperbole \mathcal{H} a pour équation $xy = ab$.

Le cercle \mathcal{C} de centre P et de rayon PQ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos t \\ y = b + 2\sqrt{a^2 + b^2} \sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Soit donc $M \left(a + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos t, b + 2\sqrt{a^2 + b^2} \sin t \right)$ un point de \mathcal{C} .

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow (a + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cos t)(b + 2\sqrt{a^2 + b^2} \sin t) = ab \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2}(b \cos t + a \sin t) + 4(a^2 + b^2) \cos t \sin t = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t + \sin(2t) = 0 \right) \\ &\Leftrightarrow \sin(2t) + \sin(t + t_0) = 0 \text{ où } \cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 2t = -t - t_0 + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / 2t = \pi + t + t_0 + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / t = -\frac{t_0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / t = \pi + t_0 + 2k\pi. \end{aligned}$$

$t = \pi + t_0 + 2k\pi$ fournit le point de coordonnées $(-a, -b)$ c'est-à-dire le point Q . Sinon, on obtient trois autres points les points $M \left(-\frac{t_0}{3} \right)$, $M \left(-\frac{t_0}{3} + \frac{2\pi}{3} \right)$ et $M \left(-\frac{t_0}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)$. On note A , B et C ces trois points. Puisque ces trois points sont sur un cercle de centre P et que $(\vec{PA}, \vec{PB}) = (\vec{PB}, \vec{PC}) = (\vec{PC}, \vec{PA}) = \frac{2\pi}{3}$, le triangle ABC est équilatéral.



n°13 : On cherche l'équation d'une telle parabole \mathcal{P} sous la forme $(ax + by)^2 + 2cx + 2dy + e = 0$, $a^2 + b^2 = 1$, $a > 0$.

$$(1,0) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \boxed{a^2 + 2c + e = 0} \text{ et } (0,2) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \boxed{4b^2 + 4d + e = 0}.$$

D'après la règle de dédoublement des termes, une équation cartésienne de la tangente à \mathcal{P} en $(1,0)$ est $a^2x + aby + c(x+1) + dy + e = 0$ ou encore $(a^2 + c)x + (ab + d)y + c + e = 0$. Cette tangente est l'axe (Ox) si et seulement si $\boxed{a^2 + c = c + e = 0 \text{ et } ab + d \neq 0}$.

Une équation cartésienne de la tangente à \mathcal{P} en $(0,2)$ est $2abx + 2b^2y + cx + d(y+2) + e = 0$ ou encore $(2ab + c)x + (2b^2 + d)y + 2d + e = 0$. Cette tangente est l'axe (Oy) si et seulement si $\boxed{2b^2 + d = 2d + e = 0 \text{ et } 2ab + c \neq 0}$.

En résumé, \mathcal{P} est solution si et seulement si

$$\begin{cases} c = -a^2 \\ d = -2b^2 \\ e = a^2 = 4b^2 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ ab + d \neq 0 \\ 2ab + c \neq 0 \\ a > 0 \end{cases}.$$

Maintenant, $(a^2 = 4b^2, a^2 + b^2 = 1 \text{ et } a > 0) \Leftrightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. Le cas $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ fournit $d = -\frac{2}{5}$ puis $ab + d = 0$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ puis $c = -\frac{4}{5}$, $d = -\frac{2}{5}$ et $e = \frac{4}{5}$ qui sont effectivement solution du système.

On obtient ainsi une et une seule courbe du second degré solution, à savoir la courbe d'équation cartésienne

$$(2x - y)^2 - 8x - 4y + 4 = 0.$$

Il reste à vérifier que cette courbe est effectivement une parabole.

On pose $\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x - 2y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X - Y) \end{cases}$.

$$(2x - y)^2 - 8x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow 5Y^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) - \frac{4}{\sqrt{5}}(-2X - Y) + 4 = 0 \Leftrightarrow 5Y^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}Y + \frac{16}{\sqrt{5}}X + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \left(Y - \frac{6}{5\sqrt{5}} \right)^2 = -\frac{16}{\sqrt{5}} \left(X + \frac{4}{5\sqrt{5}} \right).$$

\mathcal{C} est donc effectivement une parabole.

