Planche n° 36. Fonctions de deux variables

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (T)** Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$\textbf{1)}\ \frac{xy}{x+y} \quad \textbf{2)}\ \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \textbf{3)}\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad \textbf{4)}\ \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y \quad \textbf{5)}\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \textbf{6)}\ \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

n° 2 : (***) On pose $f_{x,y} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & xt^2+yt \end{array}$ puis $F(x,y) = \sup_{t\in[-1,1]} f_{x,y}(t)$. Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

n° 3 : (*T)** Déterminer la classe de f sur $\mathbb{R}^2$ où $f(x,y) = \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \end{array}\right.$.

n° 4 : (*T)** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } y=0 \\ y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \end{array}\right. \end{array}$.

1) Etudier la continuité de f.

2) Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.

n° 5 : (***) Le laplacien d'une application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ est $\Delta g = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.
Déterminer une fontion de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction

$$g(x,y) = f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

soit non constante et ait un laplacien nul sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ le plus grand possible (une fonction de Laplacien nul est dite harmonique).

n° 6 : (T)** Trouver les extrema locaux de

1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+xy+y^2+2x+3y \end{array}$

2) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4+y^4-4xy \end{array}$

n° 7 : (***) Maximum du produit des distances aux cotés d'un triangle ABC du plan d'un point M intérieur à ce triangle (on admettra que ce maximum existe).

n° 8 : (**) Soit a un réel strictement positif donné. Trouver le minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-a)^2} + \sqrt{y^2+(x-a)^2}$.

n° 9 : (**) Trouver toutes les applications φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application f de $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x\neq 0\}$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

n° 10 : (**) Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

1) $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ (en utilisant le changement de variables $u = x+y$ et $v = x+2y$)

2) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x>0\}$ (en passant en polaires).