Calculs d'intégrales. Primitives

Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème fondamental

- Si f est continue sur l'intervalle I, alors f admet des primitives sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur l'**intervalle** I, les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Si f est continue sur l'intervalle I alors, pour tout réel a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Ainsi, pour tout réel x de I,

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Plus précisément,

$$\text{la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est la primitive de } f \text{ sur I qui s'annule en } a.$$

- Si f est continue sur l'intervalle, pour tous réel x_0 de l'intervalle I et tout réel y_0, il existe une primitive F de f sur I et une seule telle que $F(x_0) = y_0$. La primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction

$$x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notation. Le nombre $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$.

Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. On suppose que les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur l'intervalle I. Alors, pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Remarque. Si f est une fonction **continue** sur I, les notions d'intégrale et de primitive sont directement liées par la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Mais il existe des fonctions dont on sait calculer l'intégrale et qui n'admettent pas de primitive. Les fonctions en escaliers fournissent des exemples de fonctions dont on sait calculer l'intégrale sans pouvoir fournir de primitives.

