Forme algébrique des nombres complexes

Partie réelle, partie imaginaire

La forme algébrique d'un nombre complexe est $a + ib$ où a et b sont deux réels.
Si $z = a + ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, a est la partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et b est la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

La partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe sont des nombres réels.

Les réels sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle.
Les imaginaires purs sont les nombres complexes dont la partie réelle est nulle.

Egalité de deux nombres complexes sous forme algébrique

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.
Pour tous REELS a et b, $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.
Pour tous REELS a, a', b et b', $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Opérations dans $\mathbb{C}$.

Addition des complexes. Pour tous réels a, b, a' et b', $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$.
Multiplication des complexes. Pour tous réels a, b, a' et b', $(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$.
Inverse d'un complexe non nul. Pour tous réels a et b tels que $a^2 + b^2 \neq 0$, $\dfrac{1}{a + ib} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Conjugué

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. Le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$.

Pour tout nombre complexe z, z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
Pour tout nombre complexe z, z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Propriétés de calculs. « Le conjugué marche bien avec tout » :

Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
Pour tout nombre complexe non nul z, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z', $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Exemple. Pour x réel et z complexe, $\overline{\left(\dfrac{1 + 2i - z}{(1 + iz)^2} + e^{i\theta}(1 + ix)^2(3 - 2i)\right)} = \dfrac{1 - 2i - \overline{z}}{(1 - i\overline{z})^2} + e^{-i\theta}(1 - ix)^2(3 + 2i)$.

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$ où a et b sont deux réels. Le module de z est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, a et b réels, $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.
Pour tout nombre complexe non nul z, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriétés de calculs. « Le module marche bien avec la multiplication » :

Pour tous nombres complexes z et z', $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $|z^n| = |z|^n$.
Pour tout nombre complexe non nul z, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z', $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

« Le module ne marche pas bien avec l'addition » :

Pour tous nombres complexes z et z', $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

L'équation du second degré à coefficients réels

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on note δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$. On note (E) l'équation $az^2 + bz + c = 0$, équation d'inconnue complexe z. Dans tous les cas, (E) admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Plus précisément,

Si $\Delta > 0$,	Si $\Delta = 0$,	Si $\Delta < 0$,
(E) admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.	(E) admet une solution réelle double (ou encore deux solutions confondues) : $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.	(E) admet deux solutions non réelles conjuguées : $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$ ou aussi $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans tous les cas,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$