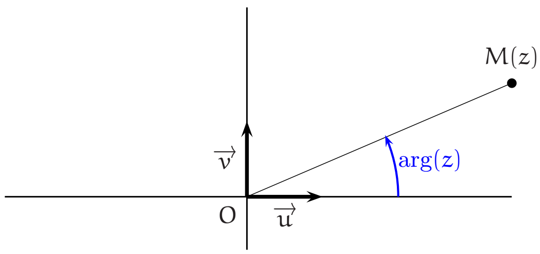
Forme trigonométrique des nombres complexes

Argument d'un nombre complexe non nul



- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. z est un complexe non nul d'image ponctuelle notée M. On appelle argument de z toute mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.
$$\arg(z) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)\ (2\pi).$$
- Si θ_0 est un argument de z, l'ensemble des arguments de z est l'ensemble des réels de la forme $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Détermination d'un argument. Si z est un complexe non nul, un argument de z est également un argument de $\dfrac{z}{|z|}$. Le nombre complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1 et il existe un réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. θ est un argument de z.

Exemple. $\arg(-\sqrt{3} + i) = \arg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = \arg\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.

La notation $e^{i\theta}$

Le calcul $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) = \ldots = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$ invite à poser

pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Formulaire.

Pour tous réels θ et θ',
- $|e^{i\theta}| = 1$.
- $\mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \cos(\theta)$, $\mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \sin(\theta)$.
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.
- Pour tout entier relatif n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Pour tous nombres complexes non nuls z et z',
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$.
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$.
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$.
- Pour tout entier relatif n, $\arg(z^n) = n.\arg(z)\ (2\pi)$.

Forme trigonométrique (ou forme exponentielle) des nombres complexes

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ est un réel. Cette écriture est unique en ce sens que :

Pour tous réels strictement positifs r et r' et tous réels θ et θ',
$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ et $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$.

Si z est un complexe non nul, l'écriture $z = re^{i\theta}$ s'appelle **la** forme trigonométrique (ou la forme exponentielle) de z.

Forme trigonométrique d'un complexe non nul z : $z = re^{i\theta}$ où r est le module de z et θ est un argument de z.

Le réel θ lui n'est pas unique :

Pour tous réels strictement positifs r et r' et tous réels θ et θ',
$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ et il existe un entier relatif k tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$.

Si r et θ sont des réels quelconques et si $z = re^{i\theta}$, la forme trigonométrique de z n'est pas toujours $re^{i\theta}$.
- si $r > 0$, la forme trigonométrique de z est $re^{i\theta}$;
- si $r < 0$, la forme trigonométrique de z est $-re^{i(\theta+\pi)}$;
- si $r = 0$, $z = 0$ et la forme trigonométrique de z n'existe pas.