Géométrie dans l'espace

Barycentres

Soient A, B, C,... des points de l'espace et a, b, c,... des réels tels que $a + b + c \neq 0$.

- Il existe un point G et un seul tel que

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} + \ldots = \overrightarrow{0}$$

G est le barycentre des points pondérés $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$... et se note $\text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$.

- Pour tout point M de l'espace, on a

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a+b+c+\ldots}\left(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + \ldots\right) \text{ ou aussi } a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + \ldots = (a+b+c+\ldots)\overrightarrow{MG}.$$

- Si de plus on se donne un repère de l'espace, les coordonnées de G sont

$$G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C + \ldots}{a+b+c+\ldots}, \frac{ay_A + by_B + cy_C + \ldots}{a+b+c+\ldots}, \frac{az_A + bz_B + cz_C + \ldots}{a+b+c+\ldots}\right).$$

Propriétés du barycentre

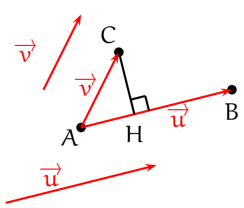
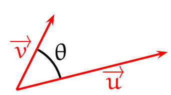
- Pour tout réel k non nul, $\text{bar}(A(a), B(b), C(c), \ldots) = \text{bar}(A(ka), B(kb), C(kc), \ldots)$.
- (Barycentre partiel) Si $a+b \neq 0$ et si $G = \text{bar}(A(a), B(b))$, alors $\text{bar}(A(a), B(b), C(c), \ldots) = \text{bar}(G(a+b), C(c), \ldots)$.

Caractérisation barycentrique de différents sous-ensembles de l'espace

- Soient A et B deux points distincts. Tout barycentre de A et B appartient à la droite (AB). Réciproquement, tout point de la droite (AB) est un barycentre de A et de B. La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.
- Soient A et B deux points distincts. Tout barycentre à coefficients positifs de A et B appartient au segment $[AB]$. Réciproquement, tout point du segment $[AB]$ est un barycentre de A et de B affectés de coefficients positifs. Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs.
- Soient A, B et C trois points non alignés. Tout barycentre de A, B et C appartient au plan (ABC). Réciproquement, tout point du plan (ABC) est un barycentre de A, B et C. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres de A, B et C.
- Soient A, B et C trois points non alignés. Tout barycentre à coefficients positifs de A, B et C appartient au domaine de frontière le triangle ABC. Réciproquement, tout point du domaine de frontière le triangle ABC est un barycentre de A, B et C affectés de coefficients positifs. Le domaine de frontière le triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A, B et C affectés de coefficients positifs .

Produit scalaire

Différentes expressions du produit scalaire

 $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overline{AB} \times \overline{AH}$.	 Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ $=$ $\\|\overrightarrow{u}\\|\\|\overrightarrow{v}\\|\cos\theta$.	Si, dans un repère orthonormal $\mathscr{R}$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) et le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées (x', y', z'), alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ et tout réel λ, on a

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}.\overrightarrow{v}$.
- $(\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$.
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geq 0$.

Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$.
Si dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$, $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (x, y, z) alors,

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si dans un repère orthonormé $\mathscr{R}$, les points A et B ont pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) alors, la distance de A à B est

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$