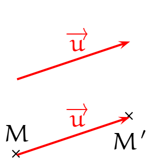
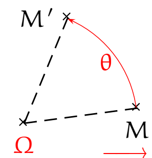
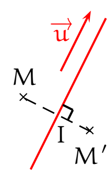
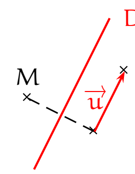
Complément sur les isométries planes

Isométries

• Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les distances. Toute isométrie conserve les angles géométriques. Une isométrie qui conserve les angles orientés est dite directe. Une isométrie qui change les angles orientés en leurs opposés est dite indirecte. Toute isométrie est soit directe, soit indirecte.
• Il y a quatre types d'isométries : les translations et les rotations, (qui sont les deux isométries directes) les réflexions (c'est-à-dire les symétries orthogonales) et les symétries glissées (qui sont les deux isométries indirectes).

Isométries directes		Isométries indirectes	
Translations	**Rotations**	**Réflexions**	**Symétries glissées**
 $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$	 • $r(\Omega) = \Omega$ • Si $M \neq \Omega$, $M' = r(M) \Leftrightarrow$ $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\ (2\pi)$	 $M' = s_D(M)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u} = 0$ et $I \in D$	 $M' = s_D(t_{\overrightarrow{u}}(M))$

Bijections. Réciproque d'une bijection

• Une transformation du plan f est une bijection du plan sur lui-même si et seulement si
 - tout point M du plan a une image par f et une seule,
 - tout point M' du plan est l'image par f d'un et un seul point M.

Quand f est une bijection, l'égalité $M' = f(M)$ peut se lire « M' est l'image de M par f » ou « M est l'antécédent de M' par f ».
• La réciproque d'une bijection f est notée f^{-1}. C'est la transformation du plan qui à chaque point M' du plan associe l'antécédent de M' par f. Ainsi, pour tous points M et M' du plan,

$$M' = f(M) \Leftrightarrow M = f^{-1}(M').$$

• Toute isométrie est une bijection du plan sur lui-même. La réciproque d'une isométrie est une isométrie.
• Réciproque des isométries usuelles :

$$(t_{\overrightarrow{u}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}} \qquad (r_{\Omega,\theta})^{-1} = r_{\Omega,-\theta} \qquad (s_D)^{-1} = s_D.$$

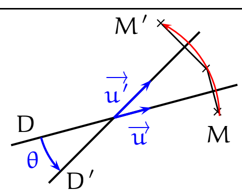
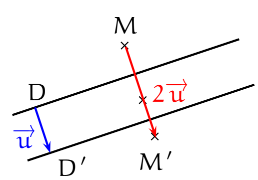
Classification des isométries par leurs points fixes

• Soit f une transformation du plan. Un point M est un point fixe de f (ou invariant par f) si et seulement si $f(M) = M$.
• Les isométries peuvent être classées par leurs points fixes :
 - Une isométrie qui a trois points fixes non alignés est l'identité.
 - Une isométrie distincte de l'identité qui admet deux points distincts fixes est une réflexion.
 - Une isométrie qui admet un et un seul point fixe est une rotation distincte de l'identité.
 - Une isométrie qui n'admet pas de point fixe est une translation ou une symétrie glissée.

Composition d'isométries

• La composée de deux isométries est une isométrie.
• La composée de deux isométries directes ou de deux isométries indirectes est une isométrie directe.
• La composée d'une isométrie directe et d'une isométrie indirecte ou d'une isométrie indirecte et d'une isométrie directe est une isométrie indirecte.

Composée de réflexions

Axes sécants	Axes parallèles
 $s_{D'} \circ s_D = r_{\Omega,2\theta}$ où $D \cap D' = \{\Omega\}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = \theta\ (2\pi)$	 $s_{D'} \circ s_D = t_{2\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à D et tel que $t_{\overrightarrow{u}}(D) = D'$.

