# Raisonnement par récurrence

$\mathscr{P}(n)$ désigne une certaine propriété dépendant d'un entier $n$ et $n_0$ désigne un entier naturel donné.
On veut démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Pour cela, on procède en deux étapes :

**Etape 1.** On vérifie que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,

**Etape 2.** On se donne un entier $n \geqslant n_0$ quelconque.
On suppose que pour cet entier $n$ la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie (c'est l'hypothèse de récurrence)
et on montre que sous cette hypothèse la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

**Exemple 1.** Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 6$, $2^n \geqslant 6n+7$.

**Solution 1.**

- Si $n = 6$, $2^n = 2^6 = 64$ et $6n+7 = 6\times 6+7 = 43$. Comme $43 < 64$, l'inégalité de l'énoncé est vraie quand $n = 6$.
- Soit $n \geqslant 6$. Supposons que $2^n \geqslant 6n+7$ et montrons que $2^{n+1} \geqslant 6(n+1)+7$.

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2\times 2^n \\
&\geq 2(6n+7) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 12n+14 = 6(n+1)+7+6n+1 \\
&\geqslant 6(n+1)+7.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 6$, $2^n \geqslant 6n+7$.

**Exemple 2.** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

**Solution 2.**

- Si $n = 0$, $4 - \frac{1}{2^{n-1}} = 4-2 = 2 = u_0$. L'égalité de l'énoncé est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et montrons que $u_{n+1} = 4 - \frac{1}{2^{(n+1)-1}}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 2 \\
&= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + 2 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} + 2 = 4 - \frac{1}{2^{(n+1)-1}}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

**Exemple 3.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $2^{2n}+2$ est un entier divisible par 3.

**Solution 3.**

- Si $n = 0$, $2^{2n}+2 = 2^0+2 = 3$ qui est bien divisible par 3. L'affirmation de l'énoncé est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $2^{2n}+2$ est un entier divisible par 3, et montrons que $2^{2(n+1)}+2$ est divisible par 3.

$$2^{2(n+1)}+2 = 2^{2n+2}+2 = 4\times 2^{2n}+2 = 3\times 2^{2n} + 1\times 2^{2n}+2 = 2^{2n}+2+3\times 2^{2n}.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe un entier naturel $k$ tel que $2^{2n}+2 = 3.k$. Mais alors,

$$2^{2(n+1)}+2 = 2^{2n}+2+3\times 2^{2n} = 3k+3\times 2^{2n} = 3(2^{2n}+k).$$

Comme $2^{2n}+k$ est un entier, on en déduit que $2^{2(n+1)}+2$ est un entier divisible par 3.
On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $2^{2n}+2$ est un entier divisible par 3.

 