Sections planes de surface

Pour écrire chaque équation cartésienne, l'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

I - Les sphères

• Définition d'une sphère

Soient Ω un point de l'espace et R un réel strictement positif.
La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

• Equation cartésienne d'une sphère

Soient $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ un point de l'espace et R un réel strictement positif.
Une équation cartésienne de la sphère de centre Ω et de rayon R est
$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$.

(Equation obtenue en passant aux coordonnées dans l'égalité $\Omega M^2 = R^2$).

• Intersection d'une sphère et d'un plan

Soient Ω un point de l'espace et R un réel strictement positif.
Soient $\mathscr{P}$ un plan et $\mathscr{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R.
On note d la distance de Ω au plan $\mathscr{P}$.

- Si $d > R$, l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{P}$ est vide.
- Si $d = R$, l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{P}$ est un point. Le plan $\mathscr{P}$ est alors tangent à $\mathscr{S}$ en ce point.
- Si $d < R$, l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{P}$ est un cercle de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.
  Le centre de ce cercle est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{P}$.

II- Les cylindres de révolution

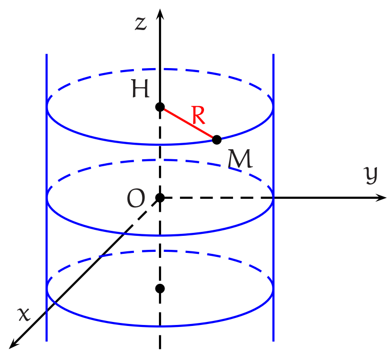
• Définition d'un cylindre de révolution

Soient $\mathscr{D}$ une droite, et R un réel strictement positif.
Le cylindre de révolution d'axe $\mathscr{D}$ et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$MH = R$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

• Equation cartésienne d'un cylindre de révolution d'axe (Oz)

Soit R un réel strictement positif.
Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe (Oz) et de rayon R est
$x^2 + y^2 = R^2$.

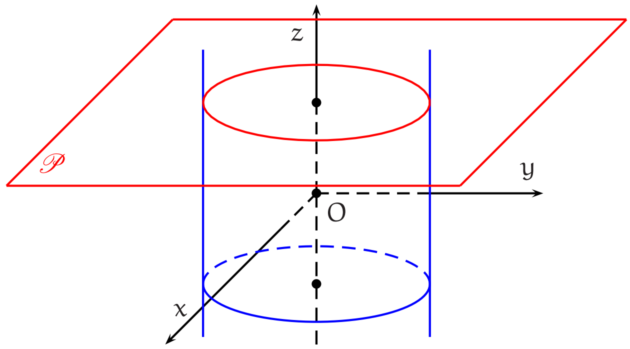
(Equation obtenue en passant aux coordonnées dans l'égalité $HM^2 = R^2$ où H est le projeté orthogonal de M sur (Oz)).

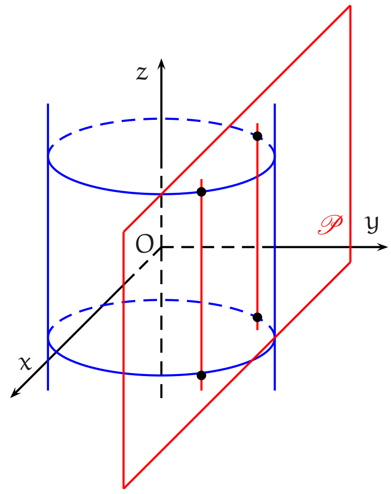


• Intersection d'un cylindre de révolution d'axe (Oz) et d'un plan parallèle au plan (xOy) ou à l'axe (Oz)

Soit R un réel strictement positif. Soient $\mathscr{C}$ le cylindre d'axe (Oz) et de rayon R et $\mathscr{P}$ un plan.

- Si $\mathscr{P} \parallel (xOy)$, l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ est un cercle de rayon R.
- Si $\mathscr{P} \parallel (Oz)$, l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$, si elle n'est pas vide, est une paire de droites parallèles à (Oz).





III - Les cônes de révolution

• Définition d'un cône de révolution

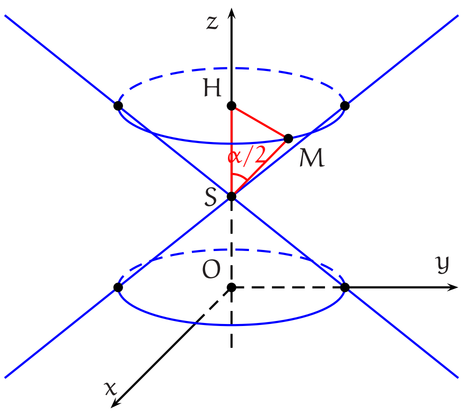
Soient $\mathscr{D}$ une droite, S un point de $\mathscr{D}$ et α un réel appartenant à $]0, \pi[$.
Le cône de révolution d'axe $\mathscr{D}$, de sommet S et d'angle au sommet α est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
ou bien $M = S$,
ou bien $M \neq S$ et $\widehat{MSH} = \dfrac{\alpha}{2}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

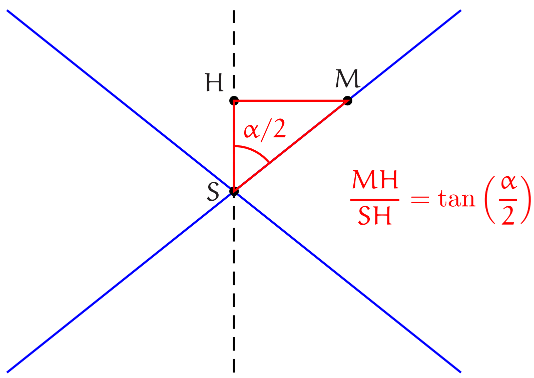
• Equation cartésienne d'un cône de révolution d'axe (Oz)

Soient $S(0, 0, h)$ un point de l'axe (Oz) et α un réel appartenant à $]0, \pi[$.
Une équation cartésienne du cône de révolution d'axe (Oz), de sommet S et d'angle au sommet α est

$$x^2 + y^2 = (z - h)^2 \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

(Equation obtenue en passant aux coordonnées dans l'égalité $HM^2 = SH^2 \tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ où H est le projeté orthogonal de M sur (Oz)).





• **Intersection d'un cône de révolution d'axe (Oz) et d'un plan parallèle au plan (xOy) ou à l'axe (Oz)**

Soient S un point de l'axe (Oz) et α un réel appartenant à $]0, \pi[$.
Soient $\mathscr{C}$ le cône de révolution d'axe (Oz), de sommet S et d'angle au sommet α et $\mathscr{P}$ un plan.

- Si $\mathscr{P} \parallel (xOy)$, l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ est un cercle.
- Si $\mathscr{P} \parallel (Oz)$, l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ est soit une paire de droites sécantes en S, soit une hyperbole.