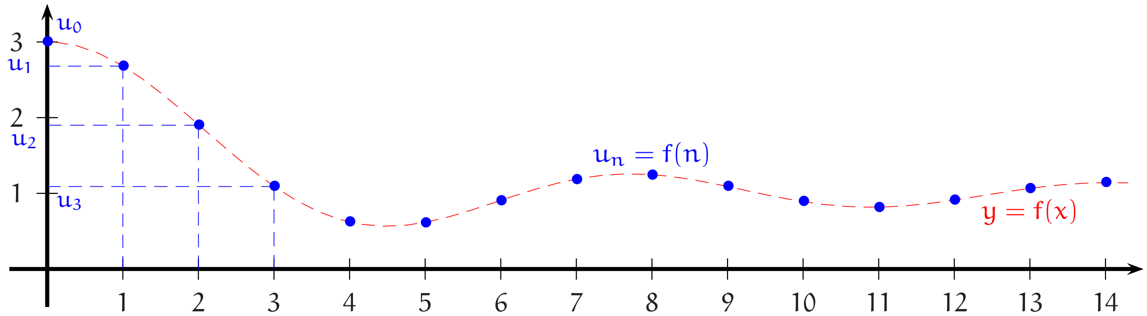
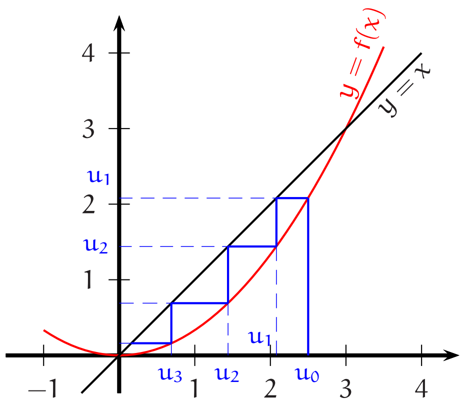
Généralités sur les suites réelles

Représentation graphique d'une suite du type $u_n = f(n)$



Représentation graphique d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$



- On construit $(\mathscr{C}_f)$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.
- On place u_0 sur l'axe des abscisses.
- On trace un trait vertical de ce point à $(\mathscr{C}_f)$ c'est-à-dire le segment joignant les points $(u_0, 0)$ et $(u_0, f(u_0)) = (u_0, u_1)$ et on peut lire u_1 horizontalement sur l'axe des ordonnées.
- On ramène u_1 sur l'axe $(0x)$ en traçant le trait horizontal joignant le point (u_0, u_1) et la droite $(\mathscr{D})$ c'est-à-dire le segment joignant les points(u_0, u_1) et (u_1, u_1). On peut maintenant lire u_1 sur l'axe (Ox).
- On trace un trait vertical du point (u_1, u_1) à $(\mathscr{C}_f)$ et on peut lire u_2 horizontalement sur l'axe des ordonnées...

Sens de variation d'une suite réelle

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.
  La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.
- La suite (u_n) est monotone si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  La suite (u_n) est strictement monotone si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou strictement décroissante.

Techniques d'étude du sens de variation d'une suite

- On compare directement u_{n+1} à u_n pour chaque entier n.
- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour chaque entier n.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et définie par des produits (ex : $u_n = 2^n n!$), on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour chaque entier n.
- Si la suite est du type $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f puis utiliser le théorème :
  si f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et si pour tout entier naturel n $u_n = f(n)$, alors
  - si f est croissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
  - si f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante,
  - si f est décroissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
  - si f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Suites réelles majorées, minorées, bornées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée si et seulement si il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée et majorée.