Asie 2017. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A : étude d'un cas particulier

1) La fonction C est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif t,

$$C'(t) = 12 \times \left(-\left(-\frac{7}{80}e^{-\frac{7}{80}t}\right)\right) = \frac{21}{20}e^{-\frac{7}{80}t}.$$

La fonction C' est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc la fonction C est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{7}{80}t} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 12(1-0) = 12$. Le traitement de ce patient n'est pas efficace.

Partie B : étude de fonctions

1) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel strictement positif x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 105\left(-\frac{1}{x^2}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{1}{x}\left(-\left(-\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)\right) \\ &= 105\left(\frac{-1 + e^{-\frac{3}{40}x}}{x^2} + \frac{\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}}{x}\right) = \frac{105}{x^2}\left(-1 + e^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3}{40}xe^{-\frac{3}{40}x}\right) \\ &= \frac{105g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

2) La fonction g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 0$. Donc, pour tout x de $]0, +\infty[$, $g(x) < 0$. On en déduit que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\frac{105g(x)}{x^2} < 0$ ou encore que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) < 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

3) $f(1) = 105\left(1 - e^{-\frac{3}{40}}\right) = 7,7\ldots$ et donc $f(1) > 5,9$. $f(80) = \frac{105}{80}\left(1 - e^{-6}\right) = 1,3\ldots$ et donc $f(80) < 5,9$.
f est continue et strictement décroissante sur $[1, 80]$. On sait que pour tout réel k de l'intervalle $[f(80), f(1)]$, l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans l'intervalle $[1, 80]$. Puisque $5,9$ appartient à l'intervalle $[f(80), f(1)]$, l'équation $f(x) = 5,9$ a une solution et une seule dans l'intervalle $[1, 80]$.

Si $0 < x < 1$,puisque f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, $f(x) > f(1) > 5,9$ et en particulier, $f(x) \neq 5,9$. Si $x > 80$, $f(x) < f(80) < 5,9$ et en particulier, $f(x) \neq 5,9$. Ceci montre que l'équation $f(x) = 5,9$ a une solution et une seule dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et de plus cette solution, notée α, appartient à l'intervalle $[1, 80]$.

La calculatrice fournit $f(8,1) = 5,901\ldots$ et $f(8,2) = 5,88\ldots$. Donc, $f(8,1) > 5,9 > f(8,2)$. Puisque f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $8,1 < \alpha < 8,2$. Ainsi, $\alpha = 8,1$ à 10^{-1} près par défaut.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

1) a) $C(6) = \frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) = \frac{105}{a}\left(1 - e^{-\frac{3a}{40}}\right) = f(a)$.

b) $C(6) = 5,9 \Leftrightarrow f(a) = 5,9 \Leftrightarrow a = \alpha$. Une valeur approchée à 10^{-1} près de la clairance est $8,1$ litres par heure.

2) $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = \frac{d}{a}(1-0) = \frac{d}{a}$. Ensuite, $\frac{d}{a} = 15 \Leftrightarrow d = 15a$. Pour un débit de $121,5$ micromoles par heure, le traitement du patient est efficace.

EXERCICE 2

1) Dans la case B3, on écrit =(A2+1)/(2*A2+4)*B2.

2) a) Il semble que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{2^n}$.

b) $v_0 = 1 \times u_0 = 1$. Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$,

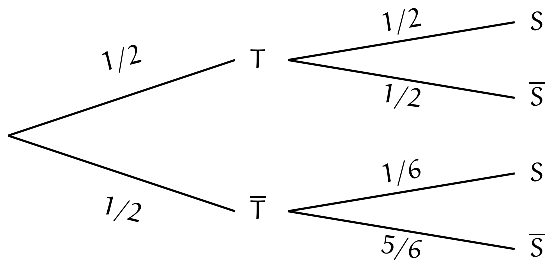
$$v_{n+1} = (n+2)u_{n+1} = (n+2) \times \frac{(n+1)}{2(n+2)} u_n = \frac{1}{2}(n+1)u_n = \frac{1}{2}v_n.$$

Ainsi, (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

3) Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n+1} v_n$. D'une part, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'autre part, puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \times 0 = 0$.

EXERCICE 3

1) On note T l'événement « on choisit le dé truqué » et S l'événement « on obtient le six ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P_S(T)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P_S(T) = \frac{P(T) \times P_T(S)}{P(T) \times P_T(S) + P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(S)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}.$$

La probabilité que le dé soit truqué est égale à $\frac{3}{4}$. La proposition 1 est fausse.

2) $x_M = \mathrm{Re}\left(z_M\right) = 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$. $z_N = \frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-3i-2i-1}{2^2+1^2} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$ et donc $x_N = \mathrm{Re}\left(z_N\right) = 1$.
Les points M et N ont la même abscisse et donc la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées. L'affirmation 2 est vraie.

3) Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{u}(1,0,2)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2,-1,-1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(6,0,-3)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 0 \times (-1) + 2 \times (-1) = 2 - 2 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 6 + 0 \times 0 + 2 \times (-3) = 6 - 6 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc, la droite d est orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC). On en déduit que la droite d est orthogonale au plan (ABC). L'affirmation 3 est vraie.

4) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires iu encore les droites d et Δ ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites d et Δ sont sécantes ou non coplanaires.

La droite Δ admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2u \\ y = 4+u \\ z = 1+3u \end{array}\right.$. Soient alors $M(1+t, 2, 3+2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d et $N(1+2u, 4+u, 1+3u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

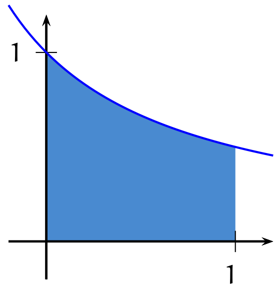
$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+t = 1+2u \\ 2 = 4+u \\ 3+2t = 1+3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -2 \\ t = 2u \\ 3+4u = 1+3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -2 \\ t = -4 \end{array}\right.$$

Les droites d et Δ ont donc un point commun. En particulier, les droites d et Δ sont coplanaires et la proposition 4 est fausse.

EXERCICE 4.

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est continue et positive sur $[0,1]$. Donc, I est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.



2) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

Partie B : estimation de la valeur de J

1) Algorithme complété.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de n
	c prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    Si $y \leqslant 1/\left(1+x^2\right)$ alors
	        c prend la valeur $c+1$
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur c/n

Sortie	Afficher f

2) Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% de la valeur exacte de J est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,781 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, 0,781 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,749; 0,813]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

3) L'amplitude de l'intervalle est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02 \Leftrightarrow \frac{2}{0,02} \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow 100 \leqslant \sqrt{n} \Leftrightarrow n \geqslant 10\ 000.$$

La valeur minimum de n pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieure ou égale à $0,02$ est $10\ 000$.

EXERCICE 5.

Partie A : ligne de transmission

1) a) Soient a, b, c et d quatre réels puis $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a-b & c-d \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$PQ = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a-b & c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ a-b=0 \\ c+d=0 \\ c-d=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=a \\ a=\dfrac{1}{2} \\ d=-c \\ c=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2} \text{ et } d=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, on a trouvé une matrice carrée Q telle que $PQ = QP = I_2$.

On en déduit que la matrice P est inversible et que $P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b)

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2p-1 \\ 1 & -2p+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1+2p-1}{2} & \dfrac{1-2p+1}{2} \\ \dfrac{1-2p+1}{2} & \dfrac{1+2p-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix} = A.$$

c) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- $PD^1P^{-1} = PDP^{-1} = A$ d'après la question précédente. L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = X_n = A^nX_0$, on lit dans que la copie d'écran :

$$q_n = \frac{-(2p-1)^n + 1}{2}.$$

Le calcul à la main fournit rapidement ce résultat :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (2p-1)^n \\ 1 & -(2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(2p-1)^n+1}{2} & \frac{-(2p-1)^n+1}{2} \\ \frac{-(2p-1)^n+1}{2} & \frac{(2p-1)^n+1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(2p-1)^n+1}{2} \\ \frac{-(2p-1)^n+1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut $q_n \leqslant 0,25$.

$$\begin{aligned} q_n \leqslant 0,25 &\Leftrightarrow \frac{-(2\times 0,98-1)^n+1}{2} \leqslant 0,25 \Leftrightarrow -(0,96)^n+1 \leqslant 0,5 \Leftrightarrow -(0,96)^n \leqslant -0,5 \\ &\Leftrightarrow 0,96^n \geqslant 0,5 \Leftrightarrow \ln\left(0,96^n\right) \geqslant \ln(0,5) \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,96) \geqslant \ln(0,5) \\ &\Leftrightarrow n \leqslant \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,96)} \text{ (car } \ln(0,96) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \leqslant 16,9\ldots \\ &\Leftrightarrow n \leqslant 16 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

On peut aligner au maximum 16 lignes de transmission.

Partie B : étude d'un code correcteur, le code de Hamming (7,4)

1) a) Le reste de la division euclidienne d'un entier par 2 est un entier naturel strictement inférieur à 2 et est donc égal à 0 ou 1. Donc, c_1, c_2 et c_3 ne peuvent prendre comme valeurs que 0 ou 1.

b) $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ et $b_4 = 1$. Donc,
- $b_2 + b_3 + b_4 = 1$ puis $c_1 = 1$,
- $b_1 + b_3 + b_4 = 2$ puis $c_2 = 0$,
- $b_1 + b_2 + b_4 = 1$ puis $c_3 = 0$.

La clé de contrôle associée au mot 1001 est 100. Le message transmis est donc 1001100.

2) Si on modifie b_1, $b_2 + b_3 + b_4$ est inchangé et donc c_1 est inchangé. Par contre, $b_1 + b_3 + b_4$ et $b_1 + b_2 + b_4$ sont augmentés de 1 ou diminués de 1. Dans tous les cas, ces deux nombres changent de parité et donc c_2 et c_3 sont modifiés.

3) On obtient le tableau suivant

Bit erroné / Bit de contrôle calculé	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	Aucun
c_1	J	F	F	F	F	J	J	J
c_2	F	J	F	F	J	F	J	J
c_3	F	F	J	F	J	J	F	J

4) Dans le tableau précédent il n'y a pas deux colonnes identiques et donc chaque erreur possible est totalement identrifiée.

5) Pour le message A, on doit avoir $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ et $c_3 = 1$. En comparant au message reçu, on est dans la situation FFF c'est-à-dire la situation où b_4 est erroné. Le message A correct est 0101010.

Pour le message B, on doit avoir $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ et $c_3 = 1$. En comparant au message reçu, on est dans la situation JJJ c'est-à-dire la situation où tout est correct. Le message B est correct.

