Polynésie 2017. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A - Durée d'attente

1) a) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Ici, $\lambda = 0,6$ et donc $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,6} = \dfrac{5}{3} = 1,667$ min arrondi à 10^{-3}. Le temps d'attente moyen est de $1,667$ minute arrondi à 10^{-3}.

b)

$$\begin{aligned} P\left(D_1 \leqslant 5\right) &= \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^5 = \left(-e^{-5\lambda}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-5\times 0,6} \\ &= 1 - e^{-3} = 0,950 \text{ arrondi à } 10^{-3} \end{aligned}$$

2) a) Pour tout réel positif t, $P\left(D_2 \leqslant t\right) = 1 - e^{-\lambda t}$. Donc

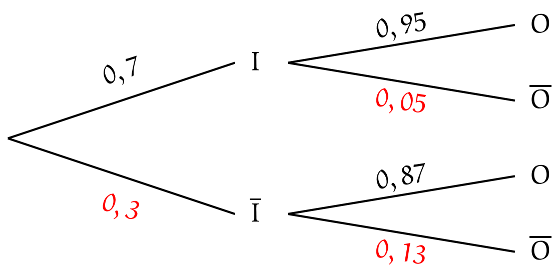
$$\begin{aligned} P\left(D_2 \leqslant 4\right) = 0,798 &\Leftrightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 0,798 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 1 - 0,798 \Leftrightarrow -4\lambda = \ln(0,202) \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}\ln(0,202). \end{aligned}$$

Donc, $\lambda = 0,4$ arrondi à 10^{-3}.

b) $P\left(D_2 \geqslant 5\right) = 1 - \left(1 - e^{-0,4\times 5}\right) = e^{-2} = 0,135\ldots$ Il y a donc environ 13% des clients mobiles qui attendent au moins 5 minutes avant de joindre l'opérateur et donc pas moins de 10%.

Partie B - Obtention d'un opérateur

1) On note O l'événement « le client obtient un opérateur » et I l'événement « le client est un client Internet ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(O)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(O) = P(I) \times P_I(O) + P\left(\overline{I}\right) \times P_{\overline{I}}(O) = 0,7 \times 0,95 + (1 - 0,7) \times 0,87 = 0,926.$$

2) Calculons $P_{\overline{O}}(I)$ (et $P_{\overline{O}}\left(\overline{I}\right) = 1 - P_{\overline{O}}(I)$).

$$P_{\overline{O}}(I) = \frac{P\left(\overline{O} \cap I\right)}{P\left(\overline{O}\right)} = \frac{P(I) \times P_I\left(\overline{O}\right)}{P\left(\overline{O}\right)} = \frac{0,7 \times (1 - 0,95)}{1 - 0,926} = 0,473 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

La probabilité que le client soit un client internet est environ $0,0,473$ et donc la probabilité que le client soit un client mobile est donc environ $0,527$. Par suite, il est plus probable que le client dont l'appel n'a pas abouti soit un client mobile.

Partie C - Enquête de satisfaction

Ici $n = 1303$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,85$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 1107,55 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 195,45 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,85 - 1,96\sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{1303}}; 0,85 + 1,96\sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{1303}}\right] = [0,830; 0,870]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

La fréquence observée est $f = \dfrac{1150}{1303} = 0,882\ldots$ et elle n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc, on peut estimer, au risque de se tromper de 5%, que l'entreprise se trompe, en sa défaveur.

EXERCICE 2

1) a) D'après le théorème de PYTHAGORE, $R^2 = h^2 + \ell^2$ et donc $\ell^2 = R^2 - h^2$. L'aire $\mathscr{A}$ est donc égale à $\pi\ell^2$ ou encore $\pi\left(R^2 - h^2\right)$ puis le volume du cône est

$$V(h) = \frac{1}{3}\mathscr{A}h = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - h^2\right)h = \frac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h.$$

b) Pour tout réel h de $[0, R]$, $V(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2h - h^3\right)$. La fonction V est dérivable sur $[0, R]$ et pour tout h de $[0, R]$,

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3h^2\right) = -\pi\left(h^2 - \frac{R^2}{3}\right) = -\pi\left(h - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)\left(h + \frac{R}{\sqrt{3}}\right).$$

Pour $h \in [0, R]$, $V'(h)$ est du signe de $-\left(h - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ avec $0 < \frac{R}{\sqrt{3}} < R$. Par suite, la fonction V' est strictement positive sur $\left[0, \frac{R}{\sqrt{3}}\right[$ et strictement négative sur $\left]\frac{R}{\sqrt{3}}, R\right]$. On en déduit que la fonction V est strictement croissante sur $\left[0, \frac{R}{\sqrt{3}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{R}{\sqrt{3}}, R\right]$.

La fonction V admet un maximum en $\frac{R}{\sqrt{3}}$ et ce volume maximum est

$$V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right)\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} \times \frac{2R^2}{3} \times \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}.$$

Plus précisément, le volume maximum est $V\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16\,000\pi}{9\sqrt{3}} = 3225$ cm^3 arrondi au cm^3. Il est obtenu pour une hauteur

$$h = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11,6 \text{ cm arrondi au dixième de centimètre.}$$

c) Le périmètre du disque de base est $2\pi\ell$ et aussi $(2\pi - \alpha)R$. Donc $(2\pi - \alpha)R = 2\pi\ell$ puis $2\pi - \alpha = \frac{2\pi\ell}{R}$ et donc $\alpha = 2\pi - \frac{2\pi\ell}{R}$. Quand le volume est maximum, $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ et donc $\ell = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ et donc

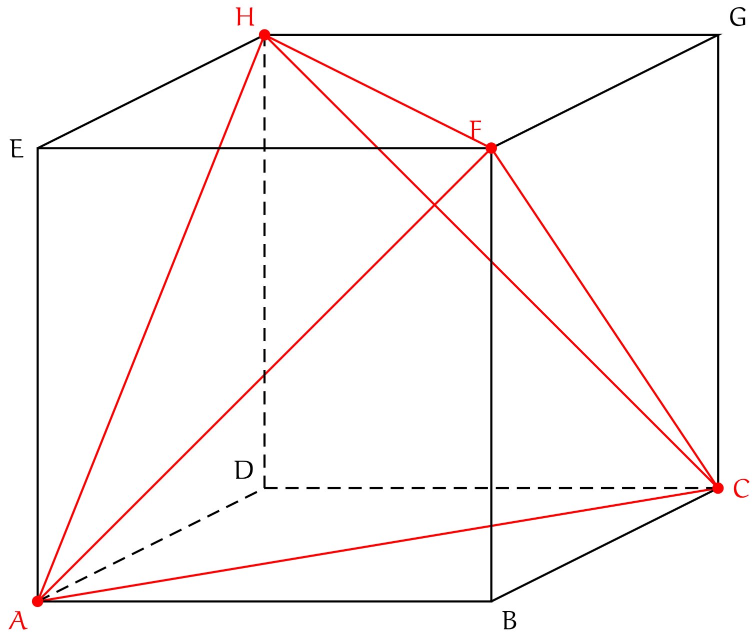
$$\alpha = 2\pi - \frac{2\pi\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}}{R} = 2\pi - \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ radians,}$$

ou encore $\alpha = 66°$ arrondi au degré.

2) Le calcul de la question précédente montre que α ne dépend pas de R.

EXERCICE 3

1) Les faces du cube sont des carrés dont le côté a pour longueur AB. Donc, les segments $[AC]$, $[CF]$, $[FA]$, $[AH]$, $[FH]$ et $[CH]$ ont tous la mêmes longueur à savoir $AB\sqrt{2}$. Par suite, les quatre faces du tétraèdre $ACFH$ sont des triangles équilatéraux ou encore le tétraèdre $ACFH$ est un tétraèdre régulier et ce tétraèdre est inscrit dans le cube $ABCDEFGH$.



2) On note Ω' le point représentant l'atome de carbone puis (x, y, z) les coordonnées de Ω'. Les points A, C, F et H ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

$$\Omega'A = \Omega'C = \Omega'F = \Omega'H \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Omega'C^2 = \Omega'A^2 \\ \Omega'F^2 = \Omega'A^2 \\ \Omega'H^2 = \Omega'A^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x - 2y + 2 = 0 \\ -2x - 2z + 2 = 0 \\ -2y - 2z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 1 \\ x + z = 1 \\ (-x + 1) + z = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 1 \\ z = x \\ x + x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le point Ω' a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Donc, le centre Ω du cube $ABCDEFGH$, qui est le milieu du segment $[AG]$, a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Finalement, le point Ω' est le centre Ω du cube $ABCDEFGH$.

3) Les points Ω, A et C ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$. Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$ ont donc pour coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

- $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.
- $\Omega A = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \Omega C$.

Donc,

$$\cos\left(\widehat{A\Omega C}\right) = \frac{\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega A \times \Omega C} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

La calculatrice fournit alors $\widehat{A\Omega C} = 109,5°$ arrondi au dixième de degré.

EXERCICE 4.

Partie A

1) Les lettres qui ont été codées par O et E sont probablement E et A respectivement.

2) L'entier qui est associé à E est 4 et l'entier associé à O est 14. Donc, 14 est le reste de la division euclidienne de 4a+b par 26. On en déduit que $4a + b \equiv 14\ [26]$.
L'entier qui est associé à A est 0 et l'entier associé à E est 4. Donc, 4 est le reste de la division euclidienne de 0a+b par 26. On en déduit que $b \equiv 4\ [26]$.

Finalement, $\left\{\begin{array}{l} 4a + b \equiv 14\ [26] \\ b \equiv 4\ [26] \end{array}\right.$.

3) Puisque $0 \leqslant b \leqslant 25$, $b \equiv 4\ [26] \Leftrightarrow b = 4$. Ensuite, pour a entier naturel compris entre 0 et 25,

$$\begin{aligned} 4a + b \equiv 14\ [26] &\Leftrightarrow 4a + 4 \equiv 14\ [26] \Leftrightarrow 4a \equiv 10\ [26] \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } q \text{ tel que } 4a = 10 + 26q \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } q \text{ tel que } 2a = 5 + 13q. \end{aligned}$$

Maintenant, si il existe un entier relatif q tel que $2a = 5 + 13q$, alors $5 + 13q$ est pair puis $13q$ est impair et donc q est nécessairement impair. Donc,

$$\begin{aligned} 4a + b \equiv 14\ [26] &\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } 2a = 5 + 13(2k + 1) \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } 2a = 18 + 26k \\ &\Leftrightarrow \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } a = 9 + 13k. \end{aligned}$$

Enfin, $0 \leqslant 9 + 13k \leqslant 25 \Leftrightarrow -9 \leqslant 13k \leqslant 16 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{13} \leqslant k \leqslant \dfrac{16}{13} \Leftrightarrow 0 \leqslant k \leqslant 1 \Leftrightarrow k = 0$ ou $k = 1$.

Les couples solutions sont les couples de la forme $(9 + 13k, 4)$ où $k = 0$ ou $k = 1$. Il y a donc exactement deux couples ayant pu permettre le codage : les couples $(9, 4)$ et $(22, 4)$.

Partie B

1) a) La lettre K correspond à $n = 10$. $an + b = 22 \times 10 + 4 = 224 = 16 + 8 \times 26$. De plus, $0 \leqslant 16 \leqslant 25$. Donc, le reste de la division euclidienne de 224 par 26 est 16. 16 correspond à la lettre Q et donc la lettre K est codée par la lettre Q.

La lettre X correspond à $n = 23$. $an + b = 22 \times 23 + 4 = 510 = 16 + 19 \times 26$. De plus, $0 \leqslant 16 \leqslant 25$. Donc, le reste de la division euclidienne de 510 par 26 est 16. 16 correspond à la lettre Q et donc la lettre X est codée par la lettre Q.

b) Les deux lettres distinctes K et X sont codées par la même lettre à savoir la lettre Q. Ce codage n'est donc pas envisageable.

2) a) Soient m et n deux entiers naturels.

$$\begin{aligned} m \equiv 9n + 4\ [26] &\Rightarrow 3m \equiv 27n + 12\ [26] \Rightarrow 3m \equiv n + 12\ [26] \text{ (car } 27 \equiv 1\ [26]) \\ &\Rightarrow n \equiv 3m - 12\ [26] \Rightarrow n \equiv 3m + 14\ [26] \text{ (car } -12 \equiv 14\ [26]). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} n \equiv 3m + 14\ [26] &\Rightarrow 9n \equiv 27m + 126\ [26] \Rightarrow 9n \equiv m + 22\ [26] \text{ (car } 126 = 22 + 4 \times 26) \\ &\Rightarrow m \equiv 9n - 22\ [26] \Rightarrow m \equiv 9m + 4\ [26] \text{ (car } -22 \equiv 4\ [26]). \end{aligned}$$

Finalement, pour tous entiers naturels m et n, $m \equiv 9n + 4\ [26] \Leftrightarrow n \equiv 3m + 14\ [26]$.

b) A correspond au nombre $m = 0$. Notons n le nombre associé à la lettre codée par A. On a $m \equiv 9n + 4\ [26]$ et donc $n \equiv 3m + 14\ [26]$ d'après la question précédente. Par suite, $n \equiv 3 \times 0 + 14\ [26]$ ou encore $n \equiv 14\ [26]$ ou enfin $n = 14$. Le nombre $n = 14$ correspond à la lettre O et donc la lettre A code la lettre O.

Q correspond au nombre $m = 16$. Notons n le nombre associé à la lettre codée par Q. On a $n \equiv 3 \times 16 + 14\ [26]$ ou encore $n \equiv 62\ [26]$ avec $62 = 10 + 2 \times 26$. Par suite $n = 10$. Le nombre $n = 10$ correspond à la lettre K et donc la lettre Q code la lettre K.

Le mot AQ code le mot OK.

