

France métropolitaine. Septembre 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Soit n un entier naturel. D'après la relation de CHASLES

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^n e^{-x^2} dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx + \int_0^n e^{-x^2} dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx.$$

Pour tout réel x de $[n, n+1]$, $e^{-x^2} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \geq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Soit x un réel. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et donc $0 \leq x^2 - 2x + 1$ puis $-x^2 \leq -2x + 1$. Par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} , on en déduit que $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, on a $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx$. Ensuite,

$$\int_0^n e^{-2x+1} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_0^n = \left(-\frac{1}{2} e^{-2n+1} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^{0+1} \right) = \frac{e}{2} - \frac{e^{-2n+1}}{2}.$$

Puisque $\frac{e^{-2n+1}}{2}$, on en déduit que $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx < \frac{e}{2}$ et finalement, $u_n < \frac{e}{2}$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_n < \frac{e}{2}$.

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante d'après a), et majorée (par $\frac{e}{2}$) d'après b). On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2) a) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive sur $[0, 2]$. Donc, u_2 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D} . L'aire, exprimée en unités d'aire, de OABC est égale à $OA \times OC$ c'est-à-dire 2. Donc,

$$u_2 = \text{aire de } \mathcal{D} = p \times \text{aire de OABC} = 2p.$$

b) i) La condition de la ligne L8 est vérifiée si et seulement si le point $M(X, Y)$ appartient au domaine \mathcal{D} .

b) ii) L'algorithme génère N points aléatoires de coordonnées (X, Y) à l'intérieur du rectangle OABC. Le compteur C dénombre parmi ces N points ceux qui sont dans le domaine \mathcal{D} . $F = \frac{C}{N}$ est donc la fréquence d'appartenance d'un point au domaine \mathcal{D} .

b) iii) Quand N est très grand, la fréquence F obtenue expérimentalement est proche de la probabilité théorique p .

c) La fréquence est $F = \frac{441\,138}{1\,000\,000} = 0,441\,138$. Donc, $0,440\,138 \leq p \leq 0,442\,138$ puis

$$0,880\,276 \leq 2p \leq 0,884\,276$$

et en particulier, $0,88 \leq 2p \leq 0,89$. Puisque $u_2 = 2p$, une valeur approchée par défaut de u_2 à 10^{-2} près est 0,88.

Partie B

1) Soit x un réel de $[0, 2]$. $A(x) = ON \times OP = xe^{-x^2}$.

2) La fonction A est dérivable sur $[0, 2]$ et pour $x \in [0, 2]$,

$$A'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2} = (1 - x\sqrt{2}) (1 + x\sqrt{2}) e^{-x^2}.$$

Pour tout réel x de $[0, 2]$, $(1 + x\sqrt{2}) e^{-x^2} > 0$ et donc $A'(x)$ est du signe de $1 - x\sqrt{2}$. En tenant compte du fait que

$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$, on en déduit que la fonction A' est strictement positive sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$

et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit encore que la fonction A est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$. Finalement, la fonction A admet un maximum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et ce maximum est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Le point M de \mathcal{C}_f pour lequel l'aire du rectangle ONMP est maximale est le point de \mathcal{C}_f d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) L'unité d'aire est 1m^2 . L'aire à peindre en bleu est l'aire maximale de ONMP c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. L'aire à peindre en blanc est $u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

La calculatrice fournit $0,428 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,429$ et donc une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,42 \text{ m}^2$. D'autre part, $0,880 \leq u_2 \leq 0,885$ et donc

$$0,880 - 0,429 \leq u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,885 - 0,428$$

ou encore $0,451 \leq u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,457$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,45 \text{ m}^2$.

EXERCICE 2

1) Le discriminant de l'équation proposée est $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = -4 < 0$. L'équation proposée admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 + 2i}{2(-1)} = 1 - i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 1 + i.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. $z' = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z \in \{1 + i, 1 - i\}$. Les points du plan dont l'image est le point d'affixe 2 sont les points d'affixes respectives $1 + i$ et $1 - i$.

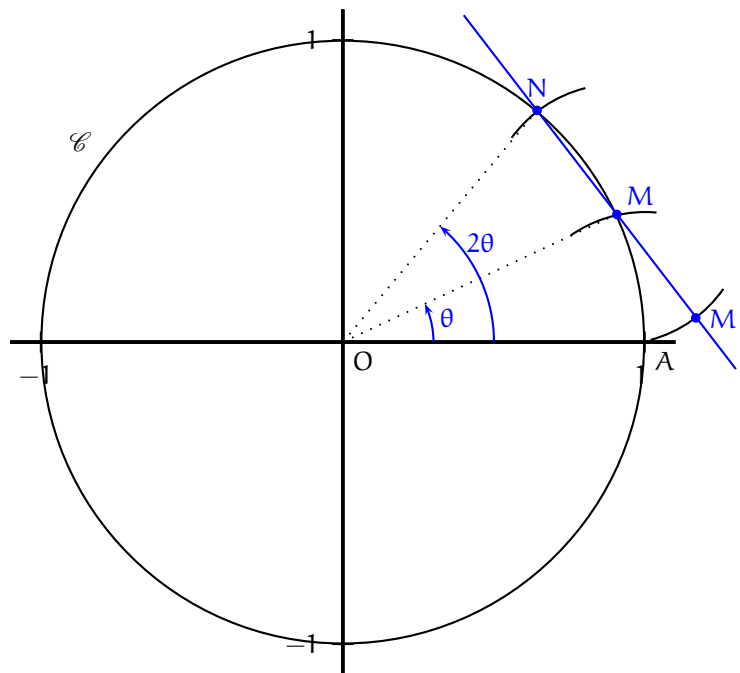
2)

$$\frac{z_N + z_{M'}}{2} = \frac{z^2 + (-z^2 + 2z)}{2} = z = z_M.$$

Donc, le point M est le milieu du segment $[NM']$.

3) a) $|z| = OM = 1$. Donc, z est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ . On en déduit que $z = e^{i\theta}$. Mais alors, $z_N = z^2 = e^{2i\theta}$ et donc un argument de z_N est 2θ .

b) Construction. On plante le compas en A avec une ouverture AM. On reporte ensuite au compas l'arc \widehat{AM} pour obtenir le point N. On trace la droite (NM). On reporte la distance NM au compas à partir de M sur la droite (NM) et on obtient le point M'.



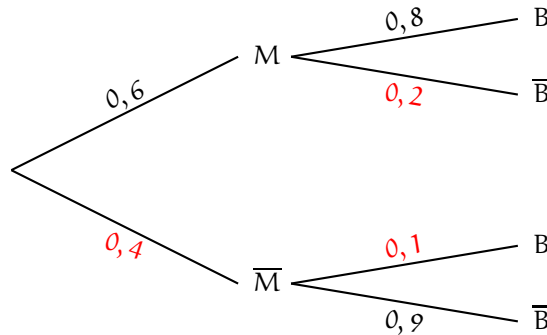
c) $MA = MN = MM'$ et donc le triangle AMM' est isocèle en M.

EXERCICE 3

1) a) La calculatrice fournit $P(1,04 \leq T \leq 2,64) = 0,954$ arrondi au millième. On note que la probabilité demandée est $P(\mu - 2\sigma \leq T \leq \mu + 2\sigma)$ et donc que cette probabilité est fournie dans le cours (à 10^{-2} près en général).

b) La calculatrice fournit $P(T \geq 1,2) = 0,945$ arrondi au millième.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(M) \times P_M(B) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(B) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 = 0,48 + 0,04 = 0,52.$$

La probabilité que le taux de cholestérol baisse est 0,52.

c) La probabilité demandée est $P_B(M)$.

$$P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = \frac{12}{13} = 0,923 \text{ arrondi au millième.}$$

3) a) Ici, $n = 100$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,3$. On note que $n \geq 30$, $np = 30 \geq 5$ et $n(1-p) = 70 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}, 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}} \right] = [0,210; 0,390]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) La fréquence observée est $f = \frac{37}{100} = 0,37$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse $p = 0,3$ au seuil 95%.

c) Notons n l'effectif de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

$$\begin{aligned} 0,3 \notin \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow 0,3 < 0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (car } 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,3) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,07 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{0,07} \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,07^2} \\ &\Leftrightarrow n > 204,08 \dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 205 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

L'effectif minimal de l'échantillon est 205.

EXERCICE 4.

1) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Le point I a donc pour coordonnées $(0, \frac{1}{2}, 1)$. De même, le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Le point J a donc pour coordonnées $(1, 0, \frac{1}{2})$.

2) a) Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Le vecteur \overrightarrow{BI} a pour coordonnées $(-1, \frac{1}{2}, 1)$ et le vecteur \overrightarrow{BG} a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Les vecteurs \overrightarrow{BI} et \overrightarrow{BG} sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BI} = 1 \times (-1) + (-2) \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 = -1 - 1 + 2 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + (-2) \times 1 + 2 \times 1 = -2 + 2 = 0.$$

Ainsi, le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) et donc le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (BGI).

b) Le plan (BGI) est le plan passant par B(1, 0, 0) et de vecteur normal $\vec{n}(1, -2, 2)$. Une équation cartésienne du plan (BGI) est $1 \times (x - 1) + (-2)(y - 0) + 2(z - 0) = 0$ ou encore

$$x - 2y + 2z = 1.$$

c) Le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le point J a pour coordonnées $(1, 0, \frac{1}{2})$. Le point K a donc pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

$$x_K - 2y_K + 2z_K = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1.$$

Donc, le point K appartient au plan (BGI).

3) a) L'aire du triangle FIG est la moitié de l'aire du carré EFGH c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. La droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) qui sont deux droites sécantes du plan (FGI). Donc, la droite (BF) est orthogonale au plan (FGI). Finalement,

$$\text{Volume de FBIG} = \frac{1}{3} (\text{aire de FGI}) \times BF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

b) La droite Δ est la droite passant par F(1, 0, 1) et de vecteur directeur $\vec{n}(1, -2, 2)$. Une représentation paramétrique de cette droite est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

c) Soit $M(1 + t, -2t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ .

$$M \in (\text{BGI}) \Leftrightarrow (1 + t) - 2(-2t) + 2(1 + 2t) = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{9}.$$

Quand $t = -\frac{2}{9}$, on obtient effectivement le point F' de coordonnées $(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9})$

d) FF' est donc la hauteur associée à la base BGI du tétraèdre FBIG. De plus,

$$FF' = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2} = \frac{1}{9} \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{36}}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de BGI}) \times FF' = \frac{1}{3} \times (\text{aire de BGI}) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} (\text{aire de BGI})$ et donc

$$\text{aire de BGI} = \frac{1/6}{2/9} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{4}.$$