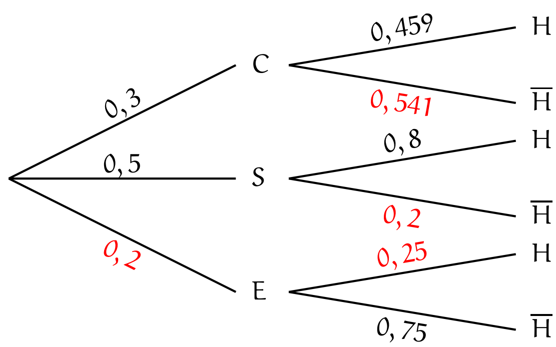
Antilles-Guyane 2018. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) La probabilité demandée est $P(C \cap H)$.

$$P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0,3 \times 0,459 = 0,137\,7.$$

3) La probabilité demandée est $P(H)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(H) &= P(C) \times P_C(H) + P(S) \times P_S(H) + P(E) \times P_E(H) = 0,3 \times 0,459 + 0,5 \times 0,8 + (1 - 0,3 - 0,5) \times (1 - 0,75) \\ &= 0,587\,7. \end{aligned}$$

4) La probabilité demandée est $P_H(S)$.

$$P_H(S) = \frac{P(H \cap S)}{P(H)} = \frac{P(S) \times P_S(H)}{P(H)} = \frac{0,5 \times 0,8}{0,587\,7} = 0,681 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(3\,400 \leqslant X \leqslant 4\,600) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma)$. La calculatrice (ou le cours) fournit $P(3\,400 \leqslant X \leqslant 4\,600) = 0,954$ arrondi à 10^{-3}.

2) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 4\,500) = 1 - P(X < 4\,500) = 1 - P(X \leqslant 4\,500)$. La calculatrice fournit $P(X \geqslant 4\,500) = 0,048$ arrondi à 10^{-3}.

Partie C

Ici, $n = 200$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,5$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $np = n(1-p) = 150$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}}\right] = [0,430; 0,570]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{106}{200} = 0,53$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc pas remettre en cause l'affirmation de l'exploitant.

EXERCICE 2

1) Les droites (LM) et (BD) sont respectivement contenues dans les plans (FEH) et (BAD) qui sont strictement parallèles. Donc, les droites (LM) et (BD) n'ont pas de point commun. On en déduit que les droites (LM) et (BD) sont, ou bien non coplanaires, ou bien strictement parallèles.

D'autre part, le point L est sur la droite (SB) et donc dans le plan (BSD) et le point M est dans le plan (BDL) qui est aussi dans le plan (BSD). Donc, les points M et L sont dans le plan (BSD) puis la droite (LM) est contenue dans le plan (BSD). Puisque la droite (BD) est contenue dans le plan (BSD), les droites (LM) et (BD) sont coplanaires.

Finalement, les droites (LM) et (BD) sont strictement parallèles.

2) Notons (x, y, z) les coordonnées du point L. Puisque le point F a pour coordonnées $(6, 0, 6)$ et que le point E a pour coordonnées $(0, 0, 6)$,

$$\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} \Rightarrow \begin{cases} x - 6 = \dfrac{2}{3}(0-6) \\ y - 0 = \dfrac{2}{3}(0-0) \\ z - 6 = \dfrac{2}{3}(6-6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}.$$

Le point L a pour coordonnées $(2, 0, 6)$.

3) a) La droite (BL) est la droite passant par le point B de coordonnées $(6, 0, 0)$ et de vecteur directeur le vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BL}$ de coordonnées $(-2, 0, 3)$. Une représentation paramétrique de la droite (BL) est donc

$$\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Le point S est le point de la droite (BL) dont l'abscisse x_S et l'ordonnée y_S sont nulles. Ceci est obtenu pour $t = 3$ et fournit $z_S = 9$. Donc, les coordonnées du point S sont $(0, 0, 9)$.

4) a) Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(-6, 6, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $(-4, 0, 6)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BD} = 3 \times (-6) + 3 \times 6 + 2 \times 0 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BL} = 3 \times (-4) + 3 \times 0 + 2 \times 6 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BDL). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL).

b) Le plan (BDL) est le plan passant par le point $B(6, 0, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(3, 3, 2)$. Une équation cartésienne du plan (BDL) est donc $3(x-6) + 3(y-0) + 2(z-0) = 0$ ou encore $3x + 3y + 2z - 18 = 0$.

c) Notons $(0, s, 6)$, $s \in \mathbb{R}$, les coordonnées du point M.

$$M \in (BDS) \Rightarrow 3 \times 0 + 3 \times s + 2 \times 6 - 18 = 0 \Rightarrow s = 2.$$

Le point M a donc pour coordonnées $(0, 2, 6)$.

5) Le volume V cherché est

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{EL \times EM}{2} \times ES = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times (9 - 6) = 2 \text{ m}^3.$$

6) Dans le triangle (SLE) rectangle en E, on a $\tan\left(\widehat{SLE}\right) = \dfrac{ES}{EL} = \dfrac{3}{2}$. La calculatrice fournit $\widehat{SLE} = 56,3°$ arrondi au dixième de degré. La contrainte d'angle est donc respectée.

EXERCICE 3

Partie A - Etude de la fonction f

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos x \leqslant 1$ et donc $-\cos x \geqslant -1$ puis $\sin x \geqslant -1$. Par suite, $-\cos x + \sin x + 1 \geqslant -1 - 1 + 1 = -1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif e^{-x}, on obtient

$$-e^{-x} \leqslant (-\cos x + \sin x + 1)e^{-x}.$$

De même, $-\cos x + \sin x + 1 \leqslant 1 + 1 + 1 = 3$ et donc $(-\cos x + \sin x + 1)e^{-x} \leqslant 3e^{-x}$. Finalement,

$$\text{pour tout réel } x,\ -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{-x}.$$

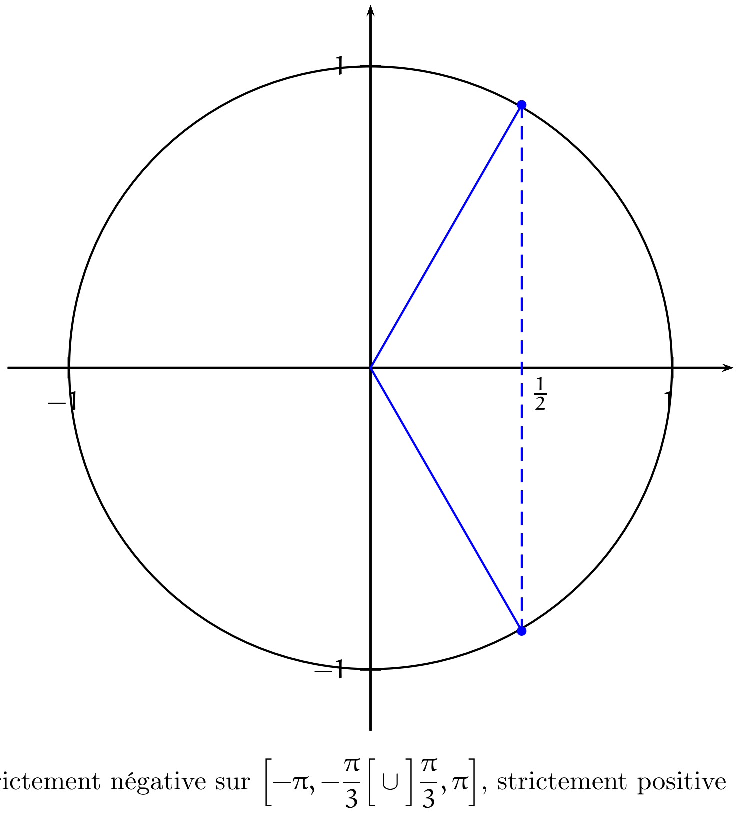
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

3) Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-(-\sin x) + \cos x + 0)\, e^{-x} + (-\cos x + \sin x + 1)\left(-e^{-x}\right) = (\sin x + \cos x + \cos x - \sin x - 1)e^{-x} \\ &= (2\cos x - 1)e^{-x}. \end{aligned}$$

4) a) Pour tout réel x de $[-\pi, \pi]$, $e^{-x} > 0$. D'autre part, pour tout réel x de $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, $\cos x < \frac{1}{2}$ et donc $2\cos x - 1 < 0$, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$, $2\cos x - 1 > 0$ et enfin, si x est égal à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$, alors $2\cos x - 1 = 0$.



Donc, la fonction f' est strictement négative sur $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$ et s'annule en $-\frac{\pi}{3}$ et en $\frac{\pi}{3}$.

b) On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

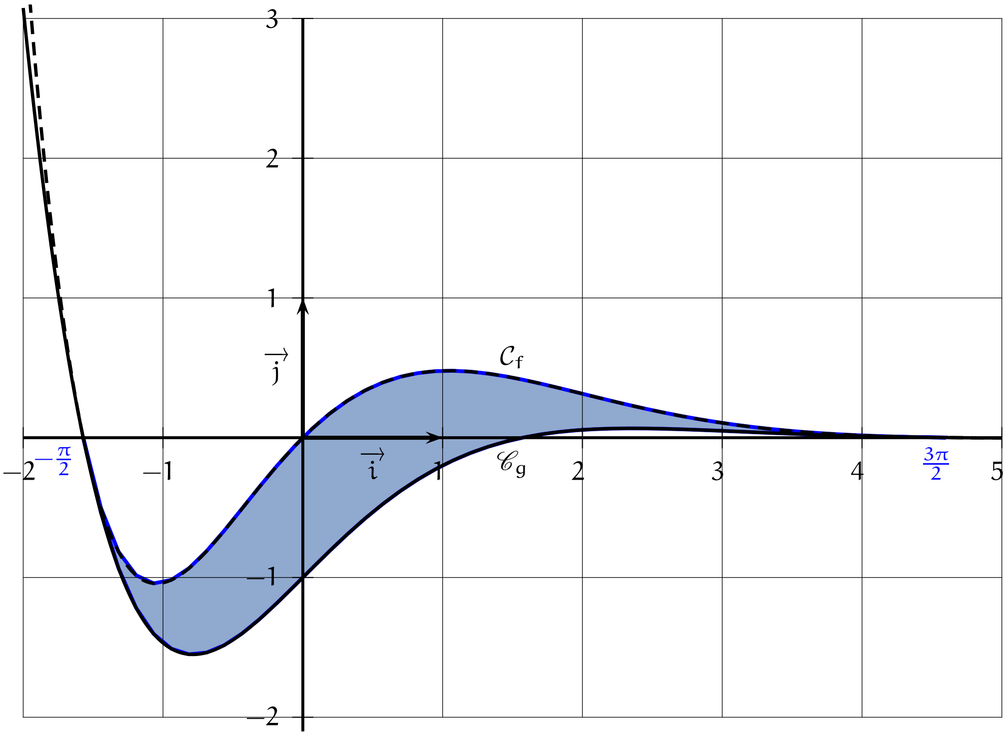
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$2e^{\pi}$	↘	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$	↗	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$	↘	$2e^{-\pi}$

Partie B - Aire du logo

1) Pour tout réel x, $f(x) - g(x) = (-\cos x + \sin x + 1 + \cos x)e^{-x} = (\sin x + 1)e^{-x}$. Pour tout réel x, $\sin x \geqslant -1$ et donc $\sin x + 1 \geqslant 0$. D'autre part, pour tout réel x, $e^{-x} > 0$. Donc, pour tout réel x, $f(x) - g(x) \geqslant 0$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

On note plus précisément que $f(x)-g(x) = 0$ si et seulement si $\sin x = -1$ ou encore x est de la forme $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont en commun les points de coordonnées $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, (car $g\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$) et en tout autre point $\mathscr{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

2) a)



b) Puisque les fonctions f et g sont continues sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$, est

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x))\ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)e^{-x}\ dx = [H(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1\right)e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 1\right)e^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2} - 1\right)e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(\frac{1}{2} - 1\right)e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}\right).
\end{aligned}$$

L'unité d'aire est égale à 4 cm² et donc

$$\mathscr{A} = 2\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{3\pi}{2}}\right) = 9,6 \text{ cm}^2 \text{ à } 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ près.}$$

EXERCICE 4.

1) Soit n un entier naturel. Les données de l'énoncé se traduisent par

$$\ell_{n+1} = 0,65\ell_n + 0,45q_n$$

et donc aussi, puisque tout pêcheur a obligatoirement une carte et une seule,

$$q_{n+1} = (1-0,65)\ell_n + (1-0,45)q_n = 0,35\ell_n + 0,55q_n.$$

Mais alors,

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} \ell_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65\ell_n + 0,45q_n \\ 0,35\ell_n + 0,55q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix} = MP_n.$$

2) La proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019 est q_2. Or,

$$\begin{aligned} P_2 = MP_1 = M^2P_0 &= \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,58 & 0,54 \\ 0,42 & 0,46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,556 \\ 0,444 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, $q_2 = 0,444$ ou encore, en 2019, 44,4% des pêcheurs achèteront une carte de pêche avec quota.

3) a) D'après les cadres 5 et 6, $TQ = QT = I_2$. Donc, la matrice Q est inversible et $Q^{-1} = T = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$.

b) La case 7 fournit $D = TMQ = Q^{-1}MQ$. Donc,

$$QDQ^{-1} = Q\left(Q^{-1}MQ\right)Q^{-1} = I_2MI_2 = M.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $M^n = QD^nQ^{-1}$.

- Puisque $M^1 = M = QDQ^{-1} = QD^1Q^{-1}$, l'égalité est vraie pour $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $M^n = QD^nQ^{-1}$. Alors

$$M^{n+1} = M \times M^n = QDQ^{-1}QD^nQ^{-1} = QDI_2D^nQ^{-1} = QDD^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $M^n = QD^nQ^{-1}$.

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $P_n = M^nP_0$.

- $M^0P_0 = I_2P_0 = P_0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $P_n = M^nP_0$. Alors

$$M^{n+1} = M \times P_n = M \times M^nP_0 = M^{n+1}P_0.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $P_n = M^nP_0$.

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} P_n = M^nP_0 &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0,2^n & 9-9\times 0,2^n \\ 7-7\times 0,2^n & 7+9\times 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} (9+7\times 0,2^n)\times 0,4 + (9-9\times 0,2^n)\times 0,6 \\ (7-7\times 0,2^n)\times 0,4 + (7+9\times 0,2^n)\times 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9-2,6\times 0,2^n \\ 7+2,6\times 0,2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier, $\ell_n = \frac{1}{16}(9-2,6\times 0,2^n) = \frac{9}{16} - \frac{2,6\times 5}{16\times 5}\times 0,2^n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0,2^n$.

5) Puisque $0 \leqslant 0,2 < 1$, la suite $\left((0,2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Mais alors, la suite $\left(\ell_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0 = \frac{9}{16} = 0,562\,5$.

Ainsi, la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0,562\,5$ en croissant. En particulier, pour tout entier naturel n,

$$\ell_n \leqslant 0,5625 < 0,6.$$

Donc, la proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre ne dépassera jamais 60%.

