BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Une ferme aquatique exploite une population de crevettes qui évolue en fonction de la reproduction naturelle et des prélèvements effectués.
La masse initiale de cette population de crevettes est estimée à 100 tonnes.
Compte tenu des conditions de reproduction et de prélèvement, on modélise la masse de la population de crevettes, exprimée en tonne, en fonction du temps, exprimé en semaine, par la fonction f_p, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_p(t) = \frac{100p}{1-(1-p)e^{-pt}}$$

où p est un paramètre strictement compris entre 0 et 1 et qui dépend des différentes conditions de vie et d'exploitation des crevettes.

1) Cohérence du modèle

a) Calculer $f_p(0)$.

b) On rappelle que $0 < p < 1$.
Démontrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $1-(1-p)e^{-pt} \geqslant p$.

c) En déduire que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $0 < f_p(t) \leqslant 100$.

2) Étude de l'évolution lorsque $p = 0,9$
Dans cette question, on prend $p = 0,9$ et on étudie la fonction $f_{0,9}$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_{0,9}(t) = \frac{90}{1-0,1e^{-0,9t}}.$$

a) Déterminer les variations de la fonction $f_{0,9}$.

b) Démontrer pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $f_{0,9}(t) \geqslant 90$.

c) Interpréter les résultats des questions 2. a. et 2. b. dans le contexte.

3) Retour au cas général
On rappelle que $0 < p < 1$.
Exprimer en fonction de p la limite de f_p lorsque t tend vers $+\infty$.

4) Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$H(t) = 100\ln\left(2-e^{-\frac{t}{2}}\right)+50t$$

est une primitive de la fonction $f_{1/2}$ sur cet intervalle.

b) En déduire la masse moyenne de crevettes lors des 5 premières semaines d'exploitation, c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction $f_{1/2}$ sur l'intervalle $[0\,;5]$.
En donner une valeur approchée arrondie à la tonne.

EXERCICE 2 (5 points)

(commun à tous les candidats)

Dans les parties A et B de cet exercice, on considère une maladie; tout individu a une probabilité égale à $0,15$ d'être touché par cette maladie.

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples (Q. C. M.). Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Un test de dépistage de cette maladie a été mis au point. Si l'individu est malade, dans 94 % des cas, le test est positif. Pour un individu choisi au hasard dans cette population, la probabilité que le test soit positif vaut $0,158$.

1) On teste un individu choisi au hasard dans la population : le test est positif. Une valeur arrondie au centième de la probabilité que la personne soit malade est égale à :

A : 0,94 **B :** 1 **C :** 0,89 **D :** on ne peut pas savoir

2) On prélève un échantillon aléatoire dans la population, et on fait passer le test aux individus de cet échantillon. On souhaite que la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement soit supérieure ou égale à $0,99$. La taille minimum de l'échantillon doit être égale à :

A : 26 personnes **B :** 27 personnes **C :** 3 personnes **D :** 7 personnes

3) Un vaccin pour lutter contre cette maladie a été mis au point. II est fabriqué par une entreprise sous forme de dose injectable par seringue. Le volume V (exprimé en millilitre) d'une dose suit une loi normale d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ. La probabilité que le volume d'une dose, exprimé en millilitre, soit compris entre $1,99$ et $2,01$ millilitres est égale à $0,997$.
La valeur de σ doit vérifier :

A : $\sigma = 0,02$ **B :** $\sigma < 0,003$ **C :** $\sigma > 0,003$ **D :** $\sigma = 0,003$

Partie B

1) Une boîte d'un certain médicament permet de soigner un malade.
La durée d'efficacité (exprimée en mois) de ce médicament est modélisée de la manière suivante :

- durant les 12 premiers mois après fabrication, on est certain qu'il demeure efficace;
- au-delà, sa durée d'efficacité restante suit une loi exponentielle de paramètre λ.

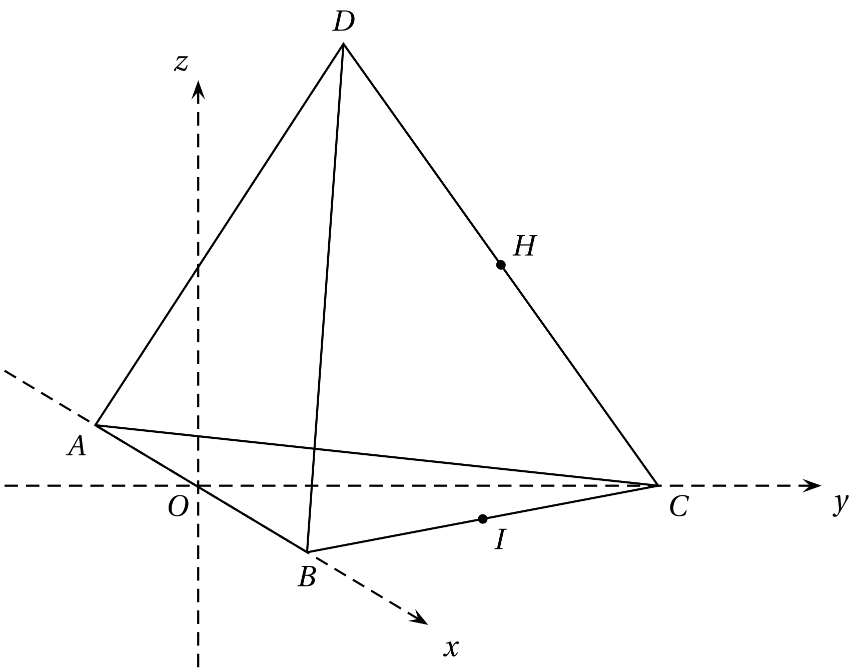
La probabilité que l'une des boîtes prise au hasard dans un stock ait une durée d'efficacité totale supérieure à 18 mois est égale à $0,887$.
Quelle est la valeur moyenne de la durée d'efficacité totale de ce médicament ?

2) Une ville de 100 000 habitants veut constituer un stock de ces boîtes afin de soigner les personnes malades.
Quelle doit être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité qu'il suffise à soigner tous les malades de cette ville soit supérieure à 95 % ?

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).
Dans ce repère, on donne les points $A(-3\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $C\left(0\ ;\ 3\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$ et $D\left(0\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 2\sqrt{6}\right)$.
On note H le milieu du segment $[CD]$ et I le milieu du segment $[BC]$.



1) Calculer les longueurs AB et AD.

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide $ABCD$ ont la même longueur, c'est-à-dire que le tétraèdre $ABCD$ est un tétraèdre régulier.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$ et passant par le point I.

2) Etude de la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\mathscr{P}$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$.

b) Démontrer que le milieu J de $[BD]$ est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathscr{P}$.

c) Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AD) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.

d) Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

e) Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\mathscr{P}$.

3) Peut-on placer un point M sur l'arête $[BD]$ tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?

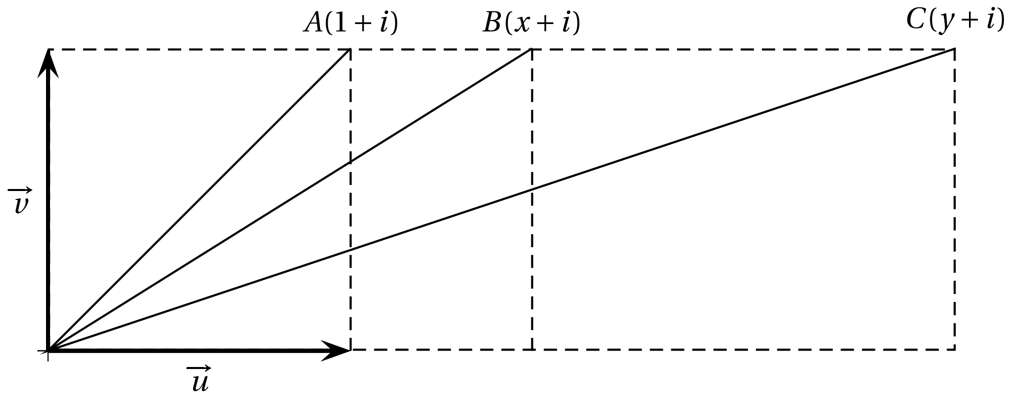
EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Dans cet exercice, x et y sont des nombres réels supérieurs à 1.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i,\ z_B = x + i \text{ et } z_C = y + i.$$



Problème : on cherche les valeurs éventuelles des réels x et y, supérieures à 1, pour lesquelles :

$$OC = OA \times OB \quad \text{et} \left(\vec{u},\ \overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{u},\ \overrightarrow{OC}\right) = \left(\vec{u},\ \overrightarrow{OA}\right).$$

1) Démontrer que si $OC = OA \times OB$, alors $y^2 = 2x^2 + 1$.

2) Reproduire sur la copie et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche tous les couples $(x,\ y)$ tels que :

$$\begin{cases} y^2 = 2x^2 + 1 \\ x \text{ et } y \text{ sont des nombres entiers} \\ 1 \leqslant x \leqslant 10 \text{ et } 1 \leqslant y \leqslant 10 \end{cases}$$

```
Pour x allant de 1 à ... faire
    Pour ...
        Si ...
            Afficher x et y
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
```

Lorsque l'on exécute cet algorithme, il affiche la valeur 2 *pour la variable* x *et la valeur* 3 *pour la variable* y.

3) Étude d'un cas particulier : dans cette question seulement, on prend $x = 2$ et $y = 3$.

a) Donner le module et un argument de z_A.

b) Montrer que $OC = OA \times OB$.

c) Montrer que $z_B z_C = 5 z_A$ et en déduire que $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{u},\ \overrightarrow{OC}\right) = \left(\vec{u},\ \overrightarrow{OA}\right)$.

4) On revient au cas général, et on cherche s'il existe d'autres valeurs des réels x et y telles que les points A, B et C vérifient les deux conditions :

$$OC = OA \times OB \quad \text{et} \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OC}\right) = \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OA}\right).$$

On rappelle que si $OC = OA \times OB$, alors $y^2 = 2x^2 + 1$ (question 1.).

a) Démontrer que si $\left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OB}\right) + \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OC}\right) = \left(\vec{u}\,,\ \overrightarrow{OA}\right)$, alors $\arg\left[\dfrac{(x+i)(y+i)}{1+i}\right] = 0 \bmod 2\pi$.

En déduire que sous cette condition : $x + y - xy + 1 = 0$.

b) Démontrer que si les deux conditions sont vérifiées et que de plus $x \neq 1$, alors :

$$y = \sqrt{2x^2+1} \quad \text{et} \quad y = \frac{x+1}{x-1}.$$

5) On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x^2+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Déterminer le nombre de solutions du problème initial.
On pourra utiliser la fonction h définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$ et s'appuyer sur la copie d'écran d'un logiciel de calcul formel donnée ci-dessous.

$f(x) := \text{sqrt}(2 * x^2 + 1)$
$x \to \sqrt{2 * x^2 + 1}$
$\text{deriver}(f)$
$x \to \dfrac{2 * x}{\sqrt{2 * x^2 + 1}}$
$g(x) := (x+1)/(x-1)$
$x \to \dfrac{x+1}{x-1}$
$\text{deriver}(g)$
$x \to -\dfrac{2}{(x-1)^2}$