Centres étrangers 2018. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) $f(20) = (0,8 \times 20 + 0,2)e^{-0,5\times 20} + 0,03 = 16,2e^{-10} + 0,03 = 0,031$ arrondi au millième.

b) Le taux maximal de CO_2 est $f(1,75)$ avec

$$f(1,75) = 1,6e^{-0,875} + 0,03 = 0,697 \text{ arrondi au millième.}$$

Le taux maximal de CO_2 dans le local, exprimé en pourcentage, est de $69,7\%$ arrondi à $0,1\%$.

2) a) Puisque la fonction f est croissante sur $[0;1,75]$, pour $t \in [0;1,75]$, $f(t) \geqslant 0,23$ et donc $f(t) > 0,035$. Ainsi, si $0 \leqslant t \leqslant 1,75$, le taux de CO_2 est strictement supérieur à 3,5%.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1,75;20]$. De plus, $f(1,75) > 0,035$ et $f(20) < 1,35$ d'après les questions précédentes. D'après un corollaire au théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel T et un seul dans $[1,75;20]$. Finalement, il existe un réel T et un seul dans $[0,20]$ tel que $f(T) = 0,035$. De plus, si $t \geqslant T$, $f(t) \leqslant 0,035$.

b) L'algorithme calcule les valeurs de $f(t)$ pour $t = 1,76$ puis $t = 1,77$ puis $t = 1,78$ ... et s'arrête à la première valeur de t pour laquelle $f(t) \leqslant 0,035$. Quand l'algorithme s'arrête, la variable t contient cette première valeur. Or,

$$f(15,6) = 0,0351\ldots > 0,035 \quad \text{et} \quad f(15,7) = 0,349\ldots < 0,035.$$

A la fin de l'algorithme, la variable t a pour valeur $15,7$. Ceci signifie que, à partir de $15,7$ minutes (à $0,1$ minute près), le taux de CO_2 retrouve une valeur inférieure à $3,5\%$.

3) a) La fonction F est dérivable sur $[0;11]$ et pour $t \in [0;11]$,

$$\begin{aligned} F'(t) &= (-1,6)e^{-0,5t} + (-1,6t - 3,6)(-0,5)e^{-0,5t} + 0,03 = (-1,6 + 0,8t + 1,8)e^{-0,5t} + 0,03 \\ &= (0,8t + 0,2)e^{-0,5t} + 0,03 = f(t). \end{aligned}$$

Donc, la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;11]$.

b) Le taux moyen de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes, exprimé en pourcentage, est cent fois la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;11]$.

$$\begin{aligned} V_m &= 100 \times \frac{1}{11-0}\int_0^{11} f(t)\,dt = \frac{100}{11}\left[F(t)\right]_0^{11} \\ &= \frac{100}{11}\left(\left((-1,6\times 11 - 3,6)e^{-0,5\times 11} + 0,03\times 11\right) - \left((-1,6\times 0 - 3,6)e^{-0,5\times 0} + 0,03\times 0\right)\right) \\ &= \frac{100}{11}\left(-21,2e^{-5,5} + 3,93\right) \\ &= 34,9\ \% \text{ arrondi à } 0,1\%. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

1) La probabilité demandée est $P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 10)$.

On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Ici, $E(D) = 8$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{8}$. On sait aussi que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement et donc

$$\begin{aligned} P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 10) &= P_{D\geqslant 3}(D \geqslant 7+3) = P(D \geqslant 7) = 1 - P(D < 7) = 1 - P(D \leqslant 7) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-\frac{7}{8}}\right) = e^{-\frac{7}{8}} \\ &= 0,42 \text{ arrondi au centième.} \end{aligned}$$

L'affirmation 1 est vraie.

2) Vu le grand nombre de dépistages effectués en 2018, la fréquence de dépistages positifs effectués peut être assimilée à la probabilité qu'un dépistage soit positif.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de dépistages positifs sur les deux dépistages effectués. 200 expériences identiques et indépendantes sont effectuées à savoir faire subir 200 tests de dépistage à 200 automobilistes. Chaque expérience a deux éventualités, « le test est positif » avec une probabilité $p = 0,031$ et « le test est négatif » avec une probabilité $1 - p = 0,969$. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,031$.

La probabilité demandée est $P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5)$. La calculatrice fournit $P(X > 5) = 0,59$ arrondi au centième. Donc, l'affirmation 2 est vraie.

3) Soit x un réel. $6x - 2 > 0$ et $2x - 1 > 0$ et $x > 0$ si et seulement si $x > \dfrac{1}{3}$ et $x > \dfrac{1}{2}$ et $x > 0$ ce qui équivaut à $x > \dfrac{1}{2}$.

Soit donc x un réel strictement supérieur à $\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x) &\Leftrightarrow \ln((6x-2)(2x-1)) = \ln(x) \Leftrightarrow (6x-2)(2x-1) = x \\ &\Leftrightarrow 12x^2 - 4x - 6x + 2 - x = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 11x + 2 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = 11^2 - 4 \times 12 \times 2 = 121 - 96 = 25$. L'équation $12x^2 - 11x + 2 = 0$ admet donc deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$, à savoir $x_1 = \dfrac{11 + \sqrt{25}}{2 \times 12} = \dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{11 - \sqrt{25}}{2 \times 12} = \dfrac{1}{4}$. Seul x_1 est dans $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ et donc l'affirmation 3 est fausse.

4) • Pour $z \in \mathbb{C}$, $\left(4z^2 - 20z + 37\right)(2z - 7 + 2i) = 0 \Leftrightarrow 4z^2 - 20z + 37 = 0$ ou $2z - 7 + 2i = 0$.

• Le discriminant de l'équation $4z^2 - 20z + 37 = 0$ est $\Delta = (-20)^2 - 4 \times 4 \times 37 = -192 < 0$. L'équation $4z^2 - 20z + 27 = 0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{20 + i\sqrt{192}}{2 \times 4} = \dfrac{20 + 8i\sqrt{3}}{2 \times 4} = \dfrac{5}{2} + i\sqrt{3} =$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{5}{2} - i\sqrt{3}$.

• Soit $z \in \mathbb{C}$. $2z - 7 + 2i = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{7 - 2i}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{7}{2} - i$.

• Notons A, B et C les points d'affixes respectives $\dfrac{5}{2} + i\sqrt{3}$, $\dfrac{5}{2} - i\sqrt{3}$ et $\dfrac{7}{2} - i$.

$PA = |z_A - z_P| = \left|\dfrac{5}{2} + i\sqrt{3} - 2\right| = \left|\dfrac{1}{2} + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 3} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

$PB = |z_B - z_P| = \left|\dfrac{5}{2} - i\sqrt{3} - 2\right| = \left|\dfrac{1}{2} - i\sqrt{3}\right| = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

$PC = |z_C - z_P| = \left|\dfrac{7}{2} - i - 2\right| = \left|\dfrac{3}{2} - i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Donc, $PA = PB = PC = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$. Les points A, B et C sont sur le cercle de centre P et de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$. L'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 3

Partie A

1) Puisque M_A suit la loi uniforme sur $[850, x]$, $P(900 \leqslant M_A \leqslant 1\,200)) = \dfrac{1\,200 - 900}{x - 850}$. Par suite,

$$\begin{aligned} P(850 \leqslant M_A \leqslant 1200)) = 0,75 \Leftrightarrow \frac{1200-900}{x-850} &= 0,75 \Leftrightarrow 300 = 0,75(x - 850) \\ \Leftrightarrow 0,75x = 300 + 0,75 \times 850 &\Leftrightarrow x = \frac{937,5}{0,75} \\ \Leftrightarrow x = 1\,250. \end{aligned}$$

2) $P(900 \leqslant M_B \leqslant 1\,200) = P(-150 \leqslant M_B - 1\,050 \leqslant 150) = P\left(-\dfrac{150}{\sigma} \leqslant \dfrac{M_B - 1\,050}{\sigma} \leqslant \dfrac{150}{\sigma}\right)$ où cette fois-ci la variable $Z = \dfrac{M_B - 1\,050}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. On veut $P\left(-\dfrac{150}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{150}{\sigma}\right) = 0,85$.

Pour des raisons de symétrie,

$$P\left(Z \geqslant \frac{150}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left(P\left(Z \leqslant -\frac{150}{\sigma}\right) + P\left(Z \geqslant \frac{150}{\sigma}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 - 0,85) = 0,075.$$

On en déduit que $P\left(Z \leqslant \dfrac{150}{\sigma}\right) = 1 - 0,075 = 0,925$. La calculatrice fournit alors $\dfrac{150}{\sigma} = 1,4\ldots$ puis $\sigma = 104$ arrondi à l'unité.

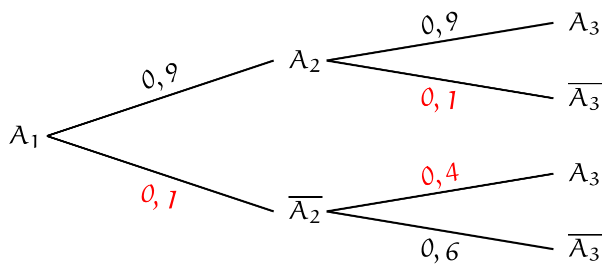
3) Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95%. Ici, $n = 400$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,8$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $np = 320 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 80 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,98\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,98\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,8 - 1,98\sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{400}}; 0,8 + 1,98\sqrt{\frac{0,8 \times 0,2}{400}}\right] = [0,76; 0,84]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{294}{400} = 0,735$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc, on peut remettre en cause l'affirmation du maraicher C au risque de se tromper de 15%.

Partie B

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) Tout d'abord, d'après la formule des probabilités totales, $P(A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P\left(\overline{A_1}\right) \times P_{\overline{A_1}}(A_2) = 1 \times 0,9 + 0 \times P_{\overline{A_1}}(A_2) = 0,9$ puis $P\left(\overline{A_2}\right) = 1 - P(A_2) = 0,1$.

Toujours d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_3) = P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) = 0,9 \times 0,9 + (1 - 0,9) \times (1 - 0,6) = 0,81 + 0,04 = 0,85.$$

c) La probabilité demandée est $P_{A_3}(A_2)$.

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{P(A_2) \times P_{A_2}(A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,85} = \frac{81}{85} = 0,95 \text{ arrondi au centième.}$$

2) Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P\left(A_{n+1}\right) = P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(\overline{A_n}\right) \times P_{\overline{A_n}}\left(A_{n+1}\right) = 0,9p_n + 0,4\left(1 - p_n\right) \\ &= 0,5p_n + 0,4. \end{aligned}$$

3) a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $p_n > 0,8$.

- L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $p_n > 0,8$. Alors

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 0,5p_n + 0,4 \\ &> 0,5 \times 0,8 + 0,4 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 0,4 + 0,4 = 0,8. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $p_n > 0,8$.

b) Soit n un entier naturel non nul. $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5p_n = 0,5\left(\dfrac{0,4}{0,5} - p_n\right) = 0,5\left(0,8 - p_n\right)$ et donc $p_{n+1} - p_n < 0$ d'après la question précédente. La suite $\left(p_n\right)_{n\geqslant 1}$ est donc strictement décroissante.

c) La suite $\left(p_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $0,8$. Donc, la suite $\left(p_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain réel ℓ supérieur ou égal à $0,8$.

4) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5p_n - 0,4 = 0,5\left(p_n - \frac{0,4}{0,5}\right) = 0,5\left(p_n - 0,8\right) \\ &= 0,5v_n. \end{aligned}$$

De plus, $v_1 = p_1 - 0,8 = 0,2$. La suite $\left(v_n\right)_{n\geqslant 1}$ est donc la suite géométrique de premier terme $v_1 = 0,2$ et de raison $q = 0,5$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel non nul,

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times (0,5)^{n-1},$$

puis que

$$p_n = v_n + 0,8 = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}.$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$. Mais alors

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,8 + 0,2 \times 0 = 0,8.$$

EXERCICE 4.

1) a) $8^2 = 64$ puis $8^2 \equiv 9$ [55] (car $64 = 9 + 1 \times 55$) puis $8^7 = 8 \times \left(8^2\right)^3 \equiv 8 \times 9^3$ [55]. Ensuite, $9^3 = 81 \times 9 \equiv 26 \times 9$ [55] puis $9^3 \equiv 234$ [55] puis $9^3 \equiv 16$ [55] car $236 = 14 + 4 \times 55$.
Mais alors $8^7 \equiv 8 \times 14$ [55] ou encore $8^7 \equiv 112$ [55] et finalement $8^7 \equiv 2$ [55] car $112 = 2 + 2 \times 55$.

On en déduit que $8^{21} = \left(8^7\right)^3 \equiv 2^3$ [55] ou encore $8^{21} \equiv 8$ [55]. Puisque $0 \leqslant 8 \leqslant 54$, le reste de la division euclidienne de 8^{21} par 55 est 8.

b) On a vu que $8^2 \equiv 9$ [55] et donc $8^{23} = 8^{21} \times 8^2 \equiv 9 \times 8$ [55] puis $8^{23} \equiv 72$ [55] et finalement $8^{23} \equiv 17$ [55]. Puisque $0 \leqslant 17 \leqslant 54$, le reste de la division euclidienne de 8^{23} par 55 est 17.

2) a) 23 et $40 = 2^3 \times 5$ sont des nombres premiers entre eux car sans facteur premier commun. D'après le théorème de Bézout, l'équation (E) admet au moins un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0) solution.

b) $40 = 1 \times 23 + 17$ puis $23 = 1 \times 17 + 6$ puis $17 = 2 \times 6 + 5$ puis $6 = 1 \times 5 + 1$. Donc,

$$\begin{aligned}1 &= 6 - 5\\ &= 6 - (17 - 2 \times 6) = 3 \times 6 - 17\\ &= 3(23 - 17) - 17 = 3 \times 23 - 4 \times 17\\ &= 3 \times 23 - 4(40 - 23) = 23 \times 7 - 40 \times 4.\end{aligned}$$

Le couple $(x_0, y_0) = (7, 4)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E).

c) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$23x - 40y = 1 \Leftrightarrow 23x - 40y = 23x_0 - 40y_0 \Leftrightarrow 23\left(x - x_0\right) = 40\left(y - y_0\right).$$

Ainsi, si (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E), nécessairement l'entier 40 divise $23\left(x - x_0\right)$. Puisque 23 et 40 sont premiers entre eux d'après la question a), l'entier 40 divise $x - x_0$ d'après le théorème de Gauss. Par suite, il existe nécessairement un entier relatif k tel que $x - x_0 = 40k$ ou encore $x = x_0 + 40k$. De même, il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 23k'$ ou encore $y = y_0 + 23k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 40k$ et $y = y_0 + 23k'$.

$$\begin{aligned}23x - 40y = 1 &\Leftrightarrow 23\left(x_0 + 40k\right) - 40\left(y_0 + 23k'\right) = 1 \Leftrightarrow 23x_0 - 40y_0 + 23 \times 40 \times \left(k - k'\right) = 1\\ &\Leftrightarrow 23 \times 40 \times \left(k - k'\right) = 0 \Leftrightarrow k = k'.\end{aligned}$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(7 + 40k, 4 + 23k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Soit d un entier relatif. $23d \equiv 1$ [40] si et seulement si il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $23d = 1 + 40q$ ou encore $23d - 40q = 1$. D'après la question précédente, il existe un entier relatif k tel que $d = 7 + 40k$. De plus,

$$0 \leqslant d < 40 \Leftrightarrow 0 \leqslant 7 + 40k < 40 \Leftrightarrow -7 \leqslant 40k < 33 \Leftrightarrow -\frac{7}{40} \leqslant k < \frac{33}{40} \Leftrightarrow k = 0.$$

Donc, nécessairement $d = 7$. Réciproquement, $23 \times 7 = 161 = 1 + 4 \times 40$ et donc $23 \times 7 \equiv 1$ [40]. Il existe donc un entier d et un seul tel que $23d \equiv 1$ [40] et $0 \leqslant d < 40$ à savoir $d = 7$.

3) a) $N = pq = 5 \times 11 = 55$ puis $n = (p-1)(q-1) = 4 \times 10 = 40$. Enfin $c = 23$ et $n = 40$ sont premiers entre eux d'après la question 2)a).

b) $a = 8$ et $c = 23$ puis $a^c = 8^{23}$. D'après la question 1)b), $8^{23} \equiv 17$ [55] ou encore $a^c \equiv 17$ [N] avec $0 \leqslant 17 \leqslant 54$. Donc, $b = 17$.

4) a) d est l'unique entier tel que $0 \leqslant d < 40$ et $23d \equiv 1$ [40]. D'après la question 2)d), $d = 7$.

b) $b = 17$ puis $b^d = 17^7$. $17^2 = 289$ puis $17^2 \equiv 14$ [55] puis $17^6 \equiv 14^3$ [55] ou encore $17^6 \equiv 2\,744$ [55]. Par suite, $17^6 \equiv -6$ [55] puis $17^7 \equiv -6 \times 17$ [55] ou encore $17^7 \equiv -102$ [55] et finalement $17^7 \equiv 8$ [55] car $-102 = 8 + 2 \times 55$. Puisque $0 \leqslant 8 \leqslant 54$, on retrouve $a = 8$.

