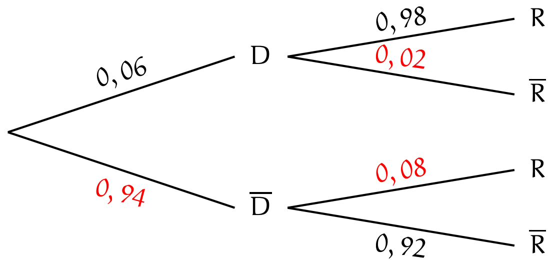
Polynésie 2018. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) L'énoncé fournit $P(D) = 0,06$, $P_D(R) = 0,98$ et $P_{\overline{D}}\left(\overline{R}\right) = 0,92$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(R)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(R) &= P(D) \times P_D(R) + P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(R) = 0,06 \times 0,98 + (1 - 0,06) \times (1 - 0,92) \\ &= 0,134. \end{aligned}$$

2) On veut calculer $P_R(D)$.

$$P_R(D) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{P(D) \times P_D(R)}{P(R)} = \frac{0,06 \times 0,98}{0,134} = 0,44 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

La proportion de DVD défectueux dans le stock de DVD retirés est strictement inférieure à la moitié. L'affirmation est donc fausse.

Partie B

Ici, $n = 150$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,06$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 9 \geqslant 5$ et $n(1 - p) = 141 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,06 - 1,96\sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}; 0,06 + 1,96\sqrt{\frac{0,06 \times 0,94}{150}}\right] = [0,021; 0,099].$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{14}{150} = 0,093\ldots$ Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse.

Partie C

1) $P(X \leqslant 92) = 1 - P(X > 92) = 1 - P(X \geqslant 92) = 0,9$. Ensuite, $P(X \leqslant 92) = P(X - 80 \leqslant 12) = P\left(\dfrac{X - 80}{\sigma} \leqslant \dfrac{12}{\sigma}\right)$ où cette fois-ci la variable $Z = \dfrac{X - 80}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On veut $P\left(Z \leqslant \dfrac{12}{\sigma}\right) = 0,9$. La calculatrice fournit $\dfrac{12}{\sigma} = 1,281\ldots$ puis $\sigma = 9.36$ à $0,01$ près.

2) La probabilité demandée est

$$P_{X \geqslant 90}(X \leqslant 95) = \frac{P((X \geqslant 90) \cap (X \leqslant 95))}{P(X \geqslant 90)} = \frac{P(90 \leqslant X \leqslant 95)}{P(X \geqslant 90)}.$$

La calculatrice fournit $P_{X \geqslant 90}(X \leqslant 95) = 0,618$ arrondi au millième.

EXERCICE 2

Partie A

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0,4]$ et pour $x \in [0,4]$, $f'(x) = 0 + b \times \dfrac{\pi}{4} \times \cos\left(c + \dfrac{\pi}{4}x\right) = \dfrac{b\pi}{4}\cos\left(c + \dfrac{\pi}{4}x\right)$.

b) On veut $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$ ce qui fournit $\dfrac{b\pi}{4}\cos(c) = 0$ et $\dfrac{b\pi}{4}\cos(c+\pi) = 0$ puis $\cos(c) = \cos(c+\pi) = 0$. Puisque $c \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et que $\cos(c) = 0$, on en déduit que $c = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Puisque $f(x_B) = y_B$, on a $f(0) = 1$ avec $f(0) = a + b\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a + b$. Donc, $a + b = 1$.

Puisque $f(x_C) = y_C$, on a $f(4) = 3$ avec $f(4) = a + b\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = a + b\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = a - b$. Donc, $a - b = 3$. Enfin,

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ a-b=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a=1+3 \\ 2b=1-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \end{array}\right. .$$

Ainsi, nécessairement, pour tout réel x de $[0,4]$, $f(x) = 2 - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}x\right)$. L'énoncé semble nous dispenser de vérifier que réciproquement, la fonction ci-dessus convient.

Partie B

1) $h = AB = 1$ et $BF = 2$ puis $r_1 = \dfrac{1}{2}BF = 1$. Le volume V_1, exprimé en unités de volume, du cylindre de section le rectangle $ABFG$ est donc

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi.$$

2) $r_2 = \dfrac{1}{2}CE = 3$. Donc, le volume V_2, exprimé en unités de volume, de la demi-sphère de section le disque de diamètre $[CE]$ est

$$V_2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 27 = 18\pi.$$

3) a) Le volume cherché est $\pi \times \dfrac{4}{5} \times f\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{4\pi}{5}\left(2 - \cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)\right) = 2,64$ arrondi au centième.

b) Algorithme complété.

$V \leftarrow 0$
Pour k allant de 0 à $n-1$:
    $V \leftarrow V + \pi \times \dfrac{4}{n} \times \left(2 - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{k}{n}\right)\right)$
Fin Pour

EXERCICE 3

1) Une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction f est la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : pour tout réel x, $F(x) = -e^{-kx}$.

2) Le point B a pour coordonnées $\left(1, ke^{-k}\right)$. L'aire du triangle OCB est

$$\frac{CO \times CB}{2} = \frac{1}{2} \times 1 \times ke^{-k} = \frac{k}{2}e^{-k}.$$

Notons $\mathscr{D}'$ le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part. Puisque la fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0, 1]$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}'$ est

$$\int_0^1 f(x)\, dx = [F(x)]_0^1 = \left(-e^{-k}\right) - \left(-e^{0}\right) = 1 - e^{-k}.$$

L'aire de $\mathscr{D}$ est alors l'aire de $\mathscr{D}'$ à laquelle on retranche l'aire du triangle OCB : $1 - e^{-k} - \dfrac{k}{2}e^{-k}$.

3) Soit k un nombre réel strictement positif. k est solution du problème si et seulement si $1 - e^{-k} - \dfrac{k}{2}e^{-k} = 2 \times \dfrac{k}{2}e^{-k}$ ce qui équivaut à $1 - e^{-k} - \dfrac{3k}{2}e^{-k} = 0$.

Pour $x \geqslant 0$, posons $g(x) = 1 - e^{-x} - \dfrac{3}{2}xe^{-x}$. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = -(-1)e^{-x} - \frac{3}{2}\left(e^{-x} + x \times \left((-1)e^{-x}\right)\right) = e^{-x} - \frac{3}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}xe^{-x} = \frac{1}{2}(3x - 1)\, e^{-x}.$$

Pour tout réel strictement positif x, e^{-x} est strictement positif et donc $g'(x)$ est du signe de $3x - 1$. On en déduit que la fonction g' est strictement négative sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right[$ et strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ puis la fonction g est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

Puisque la fonction g est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, pour $x \in \left]0, \dfrac{1}{3}\right]$, on a $g(x) < g(0)$ ou encore $g(x) < 0$. En particulier, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\left]0, \dfrac{1}{3}\right]$. D'autre part, $g(1) = 1 - e^{-1} - \dfrac{3}{2}e^{-1} = 1 - \dfrac{5}{2e} = 0,08\ldots$ Donc, $g(1) > 0$ puis $g(x) > 0$ pour $x \geqslant 1$. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas non plus de solution dans $[1, +\infty[$.

Maintenant, la fonction g est continue et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$. On sait alors que pour tout réel α de l'intervalle $\left[g\left(\dfrac{1}{3}\right), g(1)\right]$, l'équation $g(x) = \alpha$ a une solution et une seule dans $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$. Puisque $g\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$ et $g(1) > 0$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution et une seule dans $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$.

Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$ (et cette solution est dans $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$) ou encore, il existe un réel strictement positif k et un seul tel que l'aire de $\mathscr{D}$soit le double de l'aire du triangle OCB.

EXERCICE 4.

Partie A

1) Dans la case C3, on doit écrire la formule : =2*B2/3+C2/2+2*D3/3.

2) Il semble que les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes de limites approximativement égales à $0,214$ $0,571$ et $0,214$ respectivement.

Partie B

1) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1} = \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) = \frac{1}{3}(a_n - c_n) = \frac{1}{3}u_n.$$

b) On a $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$ puis, $u_0 = a_0 - c_0 = 1 - 0 = 1$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{3}$. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2) a) Soit n un entier naturel. On note A_n l'événement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n », B_n l'événement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n » et C_n l'événement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».
(A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements et donc

$$a_n + b_n + c_n = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= b_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{2}{3}(a_n + c_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} = \frac{2}{3}(1 - b_n) + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}b_n - \frac{4}{7} \\
&= -\frac{1}{6}b_n + \frac{2}{21} = -\frac{1}{6}\left(b_n - 6 \times \frac{2}{21}\right) = -\frac{1}{6}\left(b_n - \frac{4}{7}\right) \\
&= -\frac{1}{6}v_n
\end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de premier terme $v_0 = -\frac{4}{7}$ et de raison $q = -\frac{1}{6}$.

b) Pour tout entier naturel n, $v_n = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.

3) Soit n un entier naturel.

• D'après la question précédente, $b_n = \frac{4}{7} + v_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.

• D'après la question 1)b), $a_n - c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (I).

D'autre part, l'égalité $a_n + b_n + c_n = 1$ fournit $a_n + c_n = 1 - \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ (II).

En additionnant les égalités (I) et (II), on obtient $2a_n = \frac{3}{7} + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ et donc

$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

En retranchant l'égalité (I) à l'égalité (II), on obtient $2c_n = \frac{3}{7} - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ et donc

$$c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n.$$

4) Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$ et $-1 < -\frac{1}{6} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{3}{14} = 0,214\ldots \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{4}{7} = 0,571\ldots \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{3}{14} = 0,214\ldots$$

Ceci signifie qu'après un grand nombre d'étapes, le lapin a 3 chances sur 14 d'être dans la galerie A, 3 chances sur 14 d'être dans la galerie C et 8 chances sur 14 d'être dans la galerie B.

