Liban 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On note (D) la droite passant par les points $A(1, -2, -1)$ et $B(3, -5, -2)$.

1) Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2) On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{array}\right. \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3) On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

a) Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b) Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4) On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}(1, 1, -1)$.

a) Montrer que les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

b) Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

Liban 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) La droite (D) est la droite passant par A de coordonnées $(1, -2, -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(3-1, -5+2, -2+1)$ ou encore $(2, -3, -1)$. On en déduit qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

2) La droite (D) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -3, -1)$ et la droite (D') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'(-1, 2, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires (car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}' = k\overrightarrow{u}$, on a $k = -1$ en analysant la troisième coordonnée mais aussi $k = -\dfrac{1}{2}$ en analysant la première coordonnée ce qui est impossible).
Donc les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites (D) et (D') sont sécantes ou non coplanaires.
On en déduit encore que les droites (D) et (D') sont non coplanaires si et seulement si les droites (D) et (D') n'ont aucun point commun. Etudions donc l'intersection des droites (D) et $D')$. Soient t et k deux réels.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - k \\ -2 - 3t = 1 + 2k \\ -1 - t = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 - t \\ 1 + 2t = 2 - (-1 - t) \\ -2 - 3t = 1 + 2(-1 - t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 - t \\ t = 2 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites (D) et (D') n'ont pas de point commun.

Les droites (D) et (D') sont non coplanaires.

3) a) La droite (D) est l'ensemble des points de coordonnées $(1 + 2t, -2 - 3t, -1 - t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Or, pour tout réel t,

$$4(1 + 2t) + (-2 - 3t) + 5(-1 - t) + 3 = 8t - 3t - 5t + 4 - 2 - 5 + 3 = 0.$$

Donc tout point de la droite (D) appartient au plan (P) ou encore

le plan (P) contient la droite (D).

b) Soit $M(2 - k, 1 + 2k, k)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de (D').

$$M \in (P) \Leftrightarrow 4(2 - k) + (1 + 2k) + 5k + 3 = 0 \Leftrightarrow 3k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = -4.$$

Pour $k = -4$, on obtient le point de (D') de coordonnées $(6, -7, -4)$. Ainsi, le plan (P) et la droite (D') ont un point commun et un seul, le point $C(6, -7, -4)$.

Le plan (P) et la droite (D') se coupent en $C(6, -7, -4)$.

4) a) La droite (D') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'(-1, 2, 1)$.

Or, $\overrightarrow{u}'.\overrightarrow{w} = (-1) \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ et donc les droites (Δ) et (D') sont orthogonales. De plus, les droites (Δ) et (D') ont en commun le point C et finalement les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

Les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

b) La droite (D) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -3, -1)$.
Or, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$ et donc les droites (Δ) et (D) sont orthogonales.

Etudions alors l'intersection des droites (D) et (Δ). (Δ) est la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6 + t' \\ y = -7 + t' \\ z = -4 - t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 1 + 2t = 6 + t' \\ -2 - 3t = -7 + t' \\ -1 - t = -4 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -3 + t \\ 1 + 2t = 6 + (-3 + t) \\ -2 - 3t = -7 + (-3 + t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -3 + t \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = -1 \end{cases}.$$

Puisque le système précédent a des solutions, les droites (Δ) et (D) ont un point commun et sont donc perpendiculaires.
De plus, pour $t' = -1$, on obtient le point commun à savoir le point E de coordonnées $(5, -8, -3)$

Les droites (Δ) et (D) sont perpendiculaires en $E(5, -8, -3)$.

