Rochambeau 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3, -4, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-5, 2, -7)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors on a à la fois $-3k = -5$ et $-4k = 2$ ou encore $k = \frac{5}{3}$ et $k = -\frac{1}{2}$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 1\times(-3)+(-1)\times(-4)+(-1)\times 1 = -3+4-1 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 1\times(-5)+(-1)\times 2+(-1)\times(-7) = -5-2+7 = 0$. Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan (ABC).}}$$

c) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(1, -2, 4)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1, -1, -1)$.
Une équation cartésienne de ce plan est $1 \times (x - 1) - 1 \times (y - (-2)) - 1 \times (z - 4) = 0$ ou encore $x - y - z + 1 = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan (ABC) est } x - y - z + 1 = 0.}$$

2) a) La droite passant par O est orthogonale au plan (ABC) est la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1, -1, -1)$. Une représentation paramétrique de cette droite est $\left\{\begin{array}{l} x = k \\ y = -k \\ z = -k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{D}$ cette droite.

b) Le point O' est l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC). Soit $M(k, -k, -k)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow k - (-k) - (-k) + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}.$$

Quand $k = -\frac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point O' : $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } O' \text{ sont } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).}$$

3) a) Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$. On a

$$\begin{aligned} t\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 &= \left(t\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} \text{ (car } \overrightarrow{OH} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont orthogonaux).} \end{aligned}$$

Puisque $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \neq 0$, on a montré que

$$\boxed{t = \frac{\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}.}$$

b) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = (0 - (-2))(-4 - (-2)) + (0 - (-6))(0 - (-6)) + (0 - 5)(-3 - 5) = -4 + 36 + 40 = 72$.
Puis $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = (-4 - (-2))^2 + (0 - (-6))^2 + (-3 - 5)^2 = 4 + 36 + 64 = 104$ et donc $t = \frac{72}{104} = \frac{9}{13}$.

Ainsi, $\left\{\begin{array}{l} x_H + 2 = \frac{9}{13}(-4 + 2) \\ y_H + 6 = \frac{9}{13}(0 + 6) \\ z_H - 5 = \frac{9}{13}(-3 - 5) \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x_H = -\frac{44}{13} \\ y_H = -\frac{24}{13} \\ z_H = -\frac{7}{13} \end{array}\right.$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées de H sont } \left(-\frac{44}{13}, -\frac{24}{13}, -\frac{7}{13}\right).}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.