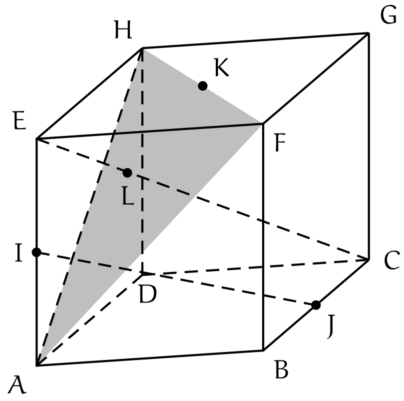
Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$:
ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
On appelle $\mathscr{P}$ le plan (AFH).
Le point I est le milieu du segment [AE],
le point J est le milieu du segment [BC],
le point K est le milieu du segment [HF],
le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan $\mathscr{P}$.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1) a) Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.
b) Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
c) Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.
d) Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

2) a) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG}$ est égal à 0.
b) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG}$ est égal à -1.
c) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG}$ est égal à 1.
d) Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.

3) Dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$:
a) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x + y + z - 1 = 0$.
b) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x - y + z = 0$.
c) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $-x + y + z = 0$.
d) Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x + y - z = 0$.

4) a) $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
b) $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
c) $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
d) $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

5) a) $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.
b) $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AK}$.
c) $\overrightarrow{ID} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$.
d) $\overrightarrow{AL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

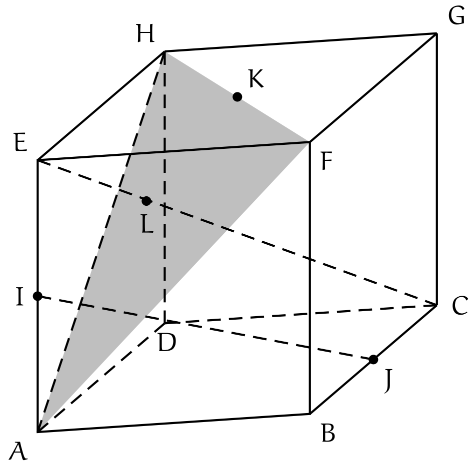
1) réponse b)

2) réponse c)

3) réponse d)

4) réponse b)

5) réponse d)



Explication 1. Si les droites (EC) et (IJ) sont coplanaires, le point J appartient au plan (ECI) qui est aussi le plan (ECA). Ceci est faux et donc les droites (EC) et (IJ) ne sont pas coplanaires. La bonne réponse est la réponse b).

Explication 2. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées respectives des points A, F, B et G sont $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,0,0)$ et $(1,1,1)$.
Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$ ont pour coordonnées respectives $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$. On en déduit que

$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 1 = 1.$$

La bonne réponse est la réponse c).

Explication 3. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées respectives des points A, F et H sont $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$.

Puisque $x_A + y_A + z_A - 1 = -1 \neq 0$, le point A n'appartient pas au plan de la proposition a).
Par contre, le point A appartient aux plans des propositions b), c) et d).

$x_F - y_F + z_F = 2 \neq 0$. Donc le point F n'appartient pas au plan de la proposition b).
$-x_H + y_H + z_H = 2 \neq 0$. Donc le point H n'appartient pas au plan de la proposition c).
La bonne réponse est donc nécessairement la réponse d). Notons que $x_A + y_A - z_A = x_F + y_F - z_F = x_G + y_G - z_G = 0$ et donc une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est effectivement $x + y - z = 0$.

Explication 4. Puisqu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $x + y - z = 0$, un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,1,-1)$.
Le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(1,1,-1)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. Comme le vecteur $\overrightarrow{EL}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{EC}$, le vecteur $\overrightarrow{EL}$ est aussi un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. La bonne réponse est la réponse b).

Explication 5. Une représentation paramétrique de la droite (EC) est $\left\{\begin{array}{l} x = t\\ y = t\\ z = 1 - t\end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$. Soit donc $M(t,t,1-t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EC).

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow t + t - (1 - t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quan $t = \frac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point L : $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Ceci peut encore s'écrire $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.
La bonne réponse est la réponse d).

