# Liban 2013. Enseignement spécifique

**EXERCICE 1**

**1)** **réponse d)**

**2)** **réponse c)**

**3)** **réponse c)**

**4)** **réponse b)**

**Explication 1 :** Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}(1,2,3)$ et un vecteur directeur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{u'}(1,1,-1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. La proposition a) est fausse. Ensuite,

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}' = 1\times 1 + 2\times 1 + 3\times(-1) = 0.$$

Donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales. La proposition d) est vraie. Vérifions tout de même que les deux autres propositions sont fausses.

Si le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$, il existe un réel $t$ tel que $\left\{\begin{array}{l} -3 = t+1 \\ 5 = 2t-1 \\ 4 = 3t+2 \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{l} t = -4 \\ t = 3 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$. Ceci est impossible et donc C n'appartient pas à $\mathscr{D}$. La proposition c) est fausse.

Puisque les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes. Soient $t$ et $k$ deux réels.

$$\left\{\begin{array}{l} t+1 = k+1 \\ 2t-1 = k+3 \\ 3t+2 = -k+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = t \\ 2t-1 = t+3 \\ 3t+2 = -t+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = t \\ t = 4 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ n'ont aucun point commun. Ces deux droites n'étant pas parallèles, elles ne sont pas coplanaires. La proposition b) est fausse.

**Explication 2 :** Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1,1,-1)$. On note que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est le vecteur $\overrightarrow{u'}$ et on rappelle que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux.

On en déduit que la droite $\mathscr{D}'$ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ et que la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$. Donc les propositions a), b) et d) sont fausses. La proposition c) est donc vraie. Vérifions-le.

On sait déjà que $\mathscr{D}'$ est orthogonale à $\mathscr{P}$. Vérifions que la droite $\mathscr{D}$ est contenue dans $\mathscr{P}$. Soit $M(t+1, 2t-1, 3t+2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$(t+1) + (2t-1) - (3t+2) + 2 = 0.$$

Donc tout point de $\mathscr{D}$ appartient à $\mathscr{P}$ ou encore $\mathscr{D}$ est contenue dans $\mathscr{P}$. La proposition c) est effectivement vraie.

**Question 3 :**

- $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$.
- $AC = \sqrt{(-3-1)^2 + (5+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56}$.
- $BC = \sqrt{(-3-3)^2 + (5-3)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}$.

Donc, le triangle ABC est équilatéral. La proposition c) est vraie. Vérifions tout de même que les autres propositions sont fausses.

Puisque le triangle ABC est équilatéral, il n'est pas rectangle. La proposition b) est fausse.

Les coordonnées du milieu de [AB] sont $\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{2+8}{2}\right)$ ou encore $(2,1,5)$. Ce milieu n'est pas le point D et donc la proposition d) est fausse.

Enfin, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-4,6,2)$ et le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(0,3,1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points A, C et D ne sont pas alignés. La proposition a) est fausse.

 

**Question 4 :** Le point $\mathsf{A}$ n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}'$. En effet, s'il existe un réel $\mathsf{k}$ tel que $\left\{\begin{array}{l} 1 = \mathsf{k}+1 \\ -1 = \mathsf{k}+3 \\ 2 = -\mathsf{k}+4 \end{array}\right.$ , alors $\left\{\begin{array}{l} \mathsf{k} = 0 \\ \mathsf{k} = -4 \\ \mathsf{k} = 2 \end{array}\right.$ . Ceci est impossible et donc le point $\mathsf{A}$ n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}'$.
Par suite, le point $\mathsf{A}$ et la droite $\mathscr{D}'$ définissent un unique plan que l'on note $\mathscr{P}'$.

Les points $\mathsf{E}(0, 2, 5)$ (obtenu quand $\mathsf{k} = -1$) et $\mathsf{F}(1, 3, 4)$ (obtenu quand $\mathsf{k} = 0$) sont deux points distincts de la droite $\mathscr{D}'$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathsf{AE}}$ a pour coordonnées $(-1, 3, 3)$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathsf{AF}}$ a pour coordonnées $(0, 4, 2)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathsf{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathsf{AF}}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}'$. Si $\overrightarrow{\mathsf{n}}$ est le vecteur de la proposition b),

$$\overrightarrow{\mathsf{n}}.\overrightarrow{\mathsf{AE}} = 3 \times (-1) + (-1) \times 3 + 2 \times 3 = -3 - 3 + 6 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{\mathsf{n}}.\overrightarrow{\mathsf{AF}} = 3 \times 0 + (-1) \times 4 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0.$$

$\overrightarrow{\mathsf{n}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}'$ et donc $\overrightarrow{\mathsf{n}}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}'$. La proposition b) est vraie. Les autres propositions sont effectivement fausses car aucun des autres vecteurs n'est colinéaire au vecteur de coordonnées $(3, -1, 2)$.

 