Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(0;4;1)$, $B(1;3;0)$, $C(2;-1;-2)$ et $D(7;-1;4)$.

1) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2;-1;3)$.

a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3) Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{array}\right., \quad t\in\mathbb{R}.$$

c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Rochambeau 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(1, -1, -1)$ et $(2, -5, -3)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $k = 2$ à partir de la première coordonnée et $-k = -5$ ou encore $k = 5$ à partir de la deuxième coordonnée. Ceci est impossible et il n'existe donc pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore

$$\boxed{\text{les points A, B et C ne sont pas alignés.}}$$

2) Ainsi, les trois points A, B et C définissent un unique plan.

a)

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 4 + 5 - 9 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal au plan (ABC) ou encore

$$\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ est orthogonale au plan } (ABC).}$$

b) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(0, 4, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$. Une équation cartésienne de ce plan est $2(x - 0) - (y - 4) + 3(z - 1) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan } (ABC) \text{ est } 2x - y + 3z + 1 = 0.}$$

c) Δ est la droite passant par $D(7, -1, 4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 7 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

d) Soit $M(7 + 2t, -1 - t, 4 + 3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(7 + 2t) - (-1 - t) + 3(4 + 3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 14t + 28 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Quand $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(3, 1, -2)$.

$$\boxed{\text{Le point H a pour coordonnées } (3, 1, -2).}$$

3) a) $\mathscr{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1, 1, 1)$ et $\mathscr{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1, 4, 0)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc

$$\boxed{\text{les plans } \mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2 \text{ sont sécants en une droite.}}$$

b) Soit $M(-4t - 2, t, 3t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d.

$$(-4t - 2) + (t) + (3t + 2) = 0$$

et

$$(-4t - 2) + 4(t) + 2 = 0.$$

Ainsi, tout point de d appartient à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et donc

$$\boxed{\text{la droite } d \text{ est la droite d'intersection des plans } \mathscr{P}_1 \text{ et } \mathscr{P}_2.}$$

c) Un vecteur directeur de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{u'}(-4, 1, 3)$ et un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}' = 2 \times (-4) + (-1) \times 1 + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la droite } d \text{ est parallèle au plan } (ABC).}$$

