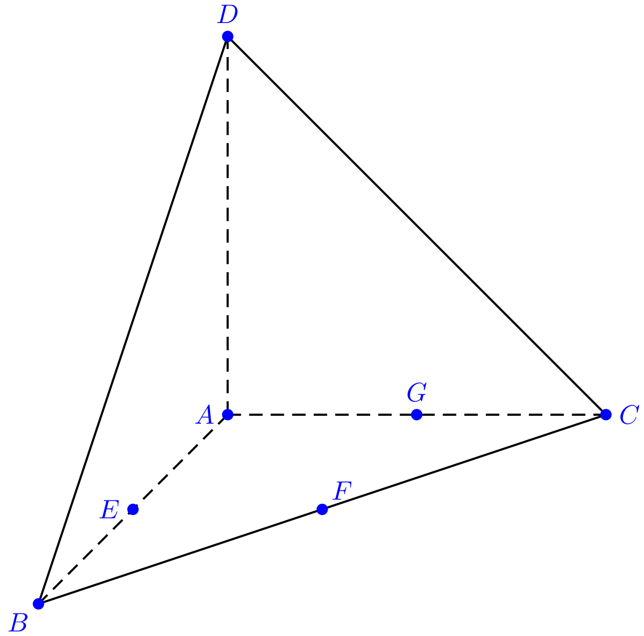
France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé



1) a) Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$, D a pour coordonnées $(0,0,1)$. D'autre part, B a pour coordonnées $(1,0,0)$ et C a pour coordonnées $(0,1,0)$. Donc F a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}, \dfrac{y_B+y_C}{2}, \dfrac{z_B+z_C}{2}\right)$ c'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

$$\boxed{D(0,0,1) \text{ et } F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).}$$

b) La droite (DF) est la droite passant par $D(0,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -1\right)$ ou aussi de vecteur directeur $2\overrightarrow{DF}$ dont les coordonnées sont $(1,1,-2)$.

Une représentation paramétrique de la droite (DF) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ y = 1-2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

c) $\mathscr{P}$ est le plan passant par $A(0,0,0)$ et de vecteur normal $2\overrightarrow{DF}\,(1,1,-2)$. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc $x+y-2z=0$.

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \mathscr{P} \text{ est } x+y-2z=0.}$$

d) Soit $M(t,t,1-2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (DF).

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow t+t-2(1-2t) = 0 \Leftrightarrow 6t-2=0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = \dfrac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point H : $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées du point } H \text{ sont } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).}$$

e) Le point E a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$. Le point G a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$. Le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{HE}$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

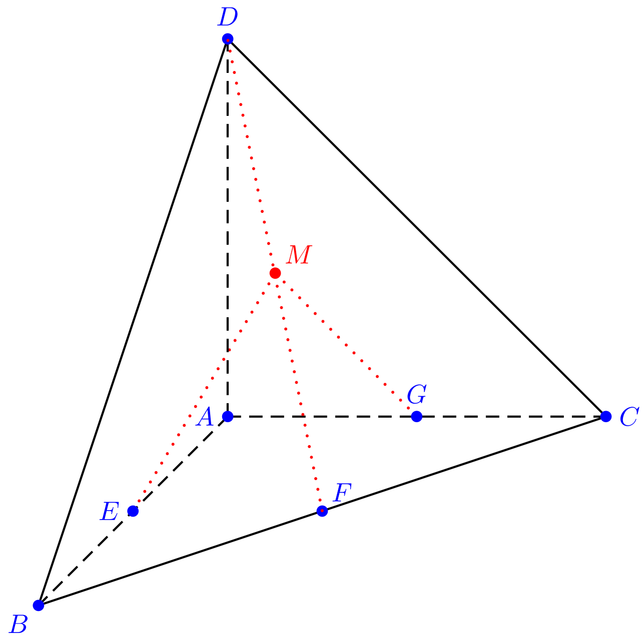
et le vecteur $\overrightarrow{HG}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$ puis

$$\overrightarrow{HE}.\overrightarrow{HG} = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{18} - \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = 0.$$

Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux ou encore

$$\boxed{\text{l'angle } \widehat{EHG} \text{ est un angle droit.}}$$

2) Notons (x, y, z) les coordonnées du point M. Puisque $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$, on a $(x, y, z-1) = \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, -t\right)$ et donc $(x, y, z) = \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, -t+1\right)$.



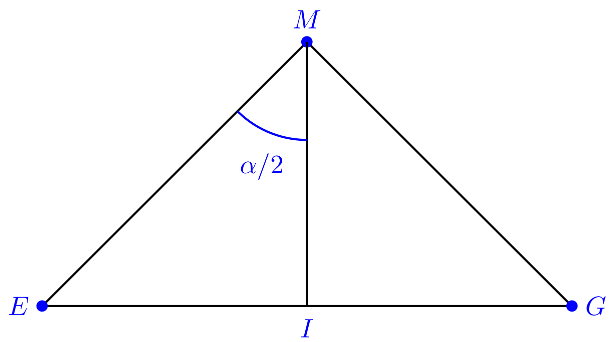
a) Les coordonnées du point M sont $\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, -t+1\right)$ et les coordonnées du point E sont $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$. Donc

$$ME^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{t}{2}\right)^2 + (t-1)^2 = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4} + t^2 - 2t + 1 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}.$$

b) De même,

$$MG^2 = \left(-\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 + (t-1)^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}.$$

On en déduit que $ME^2 = MG^2$ puis que $ME = MG$ et enfin que le triangle MEG est isocèle en M.



Notons I le milieu du segment $[EG]$. Puisque le triangle EMG est isocèle en M, la droite (MI) est également la bissetrice de l'angle $\widehat{EMG}$ de sorte que $\widehat{EMI} = \frac{\alpha}{2}$.

D'autre part, puisque le triangle EMG est isocèle en M, le triangle MIE est rectangle en I. On sait alors que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{IE}{ME}$ et donc $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = IE = \frac{EG}{2}$. De plus,

$$EG = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + (0-0)} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Finaelement, $ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{EG}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$\boxed{ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.}$$

c) α est le plus grand possible si et seulement si $\frac{\alpha}{2}$ est le plus grand possible. D'autre part, $\alpha \in [0, \pi]$ et donc $\frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Puisque la fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\alpha}{2}$ est le plus grand possible si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est le plus grand possible. On a montré que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

Ensuite, quand $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est le plus grand possible, alors $ME = \frac{1}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ est le plus petit possible et réciproquement. Enfin, le nombre positif ME est le plus petit possible si et seulement si ME^2 est le plus petit possible.

Finalement, α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$f'(t) = 3t - \frac{5}{2}.$$

La fonction f' s'annule en $\frac{5}{6}$, est négative sur $\left]-\infty, \frac{5}{6}\right]$ et positive sur $\left[\frac{5}{6}, +\infty\right[$. Par suite, la fonction f admet un minimum en $\frac{5}{6}$.

Quand $t = \frac{5}{6}$, le point M a pour coordonnées $\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}\right)$. On a montré que α est maximale quand le point M vérifie $\overrightarrow{DM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{DF}$ ou encore quand le point M a pour coordonnées $\left(\frac{5}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{6}\right)$.

