France métropolitaine 2014. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1) On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).

On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).

a) Donner les coordonnées des points D et F.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

d) Calculer les coordonnées du point H.

e) Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2) On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$.
On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.

Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

a) Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.

b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
En déduire que $ME \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d) Conclure.

