Pondichéry 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soit un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

Dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$, $N\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right)$, $P\left(1\ ;\ 0\ ;\ -\dfrac{5}{4}\right)$.

1) Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3) On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

a) Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

b) A quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4) On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

5) On considère le vecteur $\overrightarrow{n}(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$ normal au plan (MNP).

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

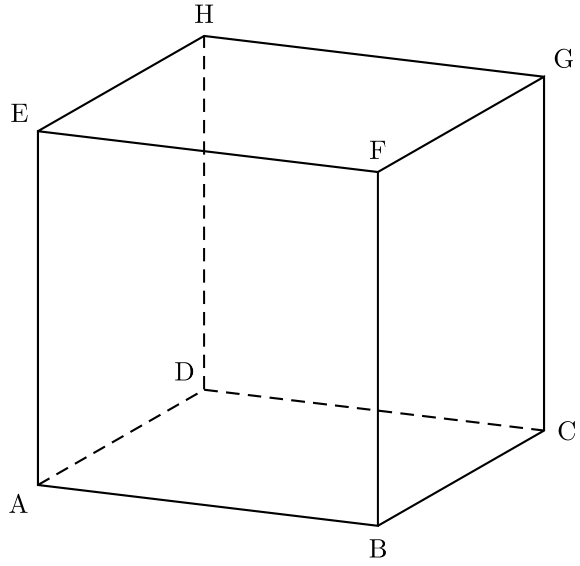
b) On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6) Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

a) Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{4}{7}\ ;\ \dfrac{24}{35}\ ;\ \dfrac{23}{35}\right)$.

b) On donne $FK = \sqrt{\dfrac{27}{35}}$. Calculer le volume du tétraèdre $MNPF$.

Annexe, Exercice 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Algorithme 1

Saisir x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

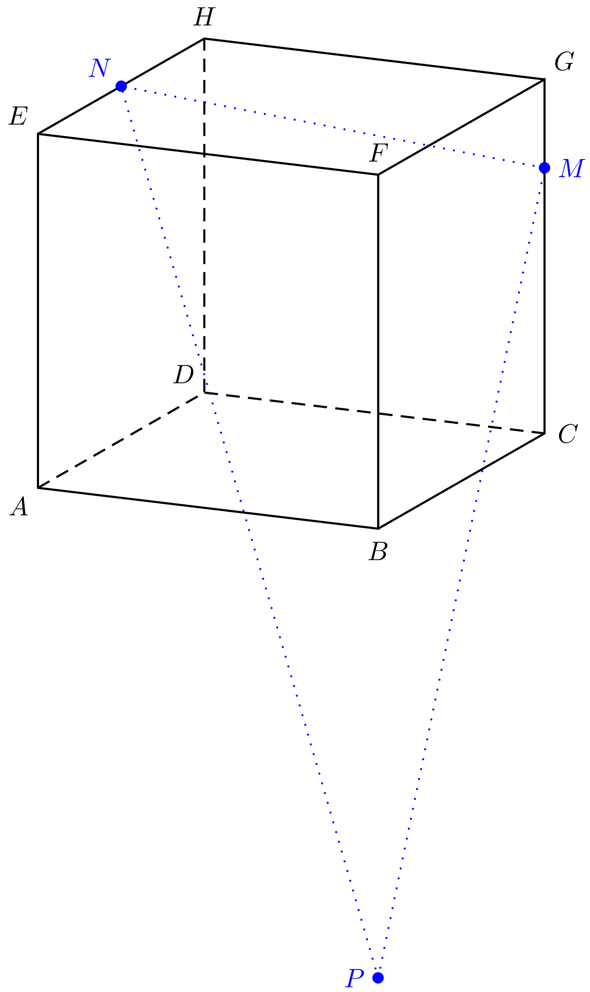
Algorithme 2 (à compléter)

Saisir x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Pondichéry 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Figure.



2) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{MP}$ a pour coordonnées $(0, -1, -2)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$, en analysant la première coordonnée, on a $-1 = 0 \times k$ ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points M, N et P ne sont pas alignés.

3) a) d prend la valeur -1, e prend la valeur $-\frac{1}{2}$, f prend la valeur $\frac{1}{4}$, g prend la valeur 0, h prend la valeur -1 et i prend la valeur -2.

k prend la valeur $(-1) \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \frac{1}{4} \times (-2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

L'algorithme affiche 0.

b) L'algorithme affiche le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$. Ici, ce produit scalaire est nul et donc le triangle MNP est rectangle en M.

4) Algorithme complété.


```
Saisir x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P
d prend la valeur x_N − x_M
e prend la valeur y_N − y_M
f prend la valeur z_N − z_M
g prend la valeur x_P − x_M
h prend la valeur y_P − y_M
i prend la valeur z_P − z_M
k prend la valeur d × g + e × h + f × i
afficher k
l prend la valeur (d² + e² + f²) − (g² + h² + i²)
afficher l
Si k = 0 et l = 0,
        afficher « le triangle MNP est rectangle et isocèle en M »
        sinon
        afficher « le triangle MNP n'est pas rectangle et isocèle en M »
Fin si
```

5) a) Le plan (MNP) est le plan passant par $M\left(1,1,\dfrac{3}{4}\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(5,-8,4)$. Une équation cartésienne du plan (MNP) est

$$5\times(x-1)-8\times(y-1)+4\times\left(z-\frac{3}{4}\right)=0,$$

ou encore

$$\boxed{\text{une équation cartésienne du plan } (MNP) \text{ est } 5x-8y+4z=0.}$$

b) Δ est la droite passant par $F(1,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(5,-8,4)$. Une représentation paramétrique de la droite Δ est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+5t\\ y=-8t\\ z=1+4t \end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}.$$

6) a) Soit $Q(1+5t,-8t,1+4t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de Δ.

$$Q\in(MNP)\Leftrightarrow 5(1+5t)-8(-8t)+4(1+4t)=0\Leftrightarrow 105t+9=0\Leftrightarrow t=-\frac{9}{105}\Leftrightarrow t=-\frac{3}{35}.$$

Quand $t=-\dfrac{3}{35}$, on obtient les coordonnées du point K à savoir $\left(\dfrac{20}{35},\dfrac{24}{35},\dfrac{23}{35}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{4}{7},\dfrac{24}{35},\dfrac{23}{35}\right)$.

b) $[FK]$ est la hauteur du tétraèdre $MNPF$ issue de F. D'autre part, puisque le triangle MNP est rectangle en M, l'aire de ce triangle est $\mathscr{A}=\dfrac{MN\times MP}{2}$.

$$MN=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{21}{16}}=\frac{\sqrt{21}}{4}$$

et

$$MP=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}.$$

Le volume du tétraèdre $MNPF$ est donc

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}\times FK=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{\sqrt{21}}{4}\times\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{\frac{27}{35}}=\frac{1}{2\times3\times4}\sqrt{\frac{3\times7\times5\times3\times9}{5\times7}}=\frac{3\times3}{2\times3\times4}=\frac{3}{8}.$$

$$\boxed{\text{Le volume } \mathscr{V} \text{ du tétraèdre } MNPF \text{ est } \mathscr{V}=\frac{3}{8}.}$$

