Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Les points B, E et G ont pour coordonnées respectives $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ et $(1,0,1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ ont pour coordonnées respectives $(-1,0,1)$ et $(0,-1,1)$. On note que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires et donc que les points B, E et G définissent un unique plan puis que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Les points D et F ont pour coordonnées respectives $(0,0,0)$ et $(1,1,1)$. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$.

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = 1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1 = -1+1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1\times 0 + 1\times(-1) + 1\times 1 = -1+1 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) et donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE).

b) Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0,1,0)$ et $(1,1,0)$. Le point I a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$.

Le plan $\mathscr{P}$ est le plan passant par $I\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{DF}(1,1,1)$. Une équation du plan $\mathscr{P}$ est donc $1\times\left(x-\frac{1}{2}\right) + 1\times(y-1) + 1\times(z-0) = 0$ ou encore $x+y+z-\frac{3}{2} = 0$.

2) Notons $(0,1,z)$, $z\in\mathbb{R}$, les coordonnées du point N. Le point N est dans le plan $\mathscr{P}$ et donc $0+1+z-\frac{3}{2} = 0$ et donc $z = \frac{1}{2}$. Ainsi, les coordonnées de N sont $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

Les points A et E ont pour coordonnées respectives $(0,1,0)$ et $(0,1,1)$. Le milieu du segment $[AE]$ a pour coordonnées $\left(\frac{0+0}{2},\frac{1+1}{2},\frac{0+1}{2}\right)$ ou encore $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$. Ce milieu est effectivement le point N.

3) a) Les points H et B ont pour coordonnées respectives $(0,0,1)$ et $(1,1,0)$. Le vecteur $\overrightarrow{HB}$ a donc pour coordonnées $(1,1,-1)$.

La droite (HB) est la droite passant par $H(0,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{HB}(1,1,-1)$. Une représentation paramétrique de la droite (HB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{array}\right., \ t\in\mathbb{R}.$$

b) Soit $U(t,t,1-t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (HB).

$$U\in\mathscr{P} \Leftrightarrow t+t+(1-t)-\frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Pour $t=\frac{1}{2}$, on obtient le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. On a montré que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en le point $T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

4) Le volume demandé est

$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire de}(FBG)\times FE}{3} = \frac{\frac{1}{2}\times 1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\boxed{\text{Le volume, exprimé en unités de volume, du tétraèdre } FBGE \text{ est } \frac{1}{6}.}$$

