France métropolitaine 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (3 points) (commun à tous les candidats)

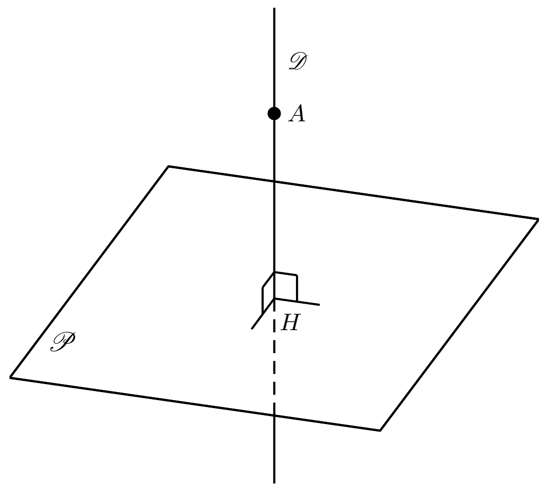
L'espace est mini d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x - z - 3 = 0$.
On note A le point de coordonnées $\left(1\ ;\ a\ ;\ a^2\right)$ où a est un nombre réel.

1) Justifier que, quelle que soit la valeur de a, le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ (de paramètre t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

b) Soit M un point appartenant à la droite $\mathscr{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente. Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$ orthogonale à $\mathscr{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathscr{P}$.



3) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $\left(1\ ;\ a\ ;\ a^2\right)$ au plan $\mathscr{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.

France métropolitaine 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Soient a un réel puis A le point de coordonnées $\left(1, a, a^2\right)$.

$$2x_A - z_A - 3 = 2 - a^2 - 3 = -1 - a^2.$$

$2x_A - z_A - 3$ est un réel strictement négatif et en particulier, $2x_A - z_A - 3 \neq 0$. On en déduit que le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

2) a) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 0, -1)$. La droite $\mathscr{D}$ est la droite passant par $A\left(1, a, a^2\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(2, 0, -1)$. Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $M\left(1 + 2t, a, a^2 - t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$AM = \sqrt{(1 + 2t - 1)^2 + (a - a)^2 + (a^2 - t - a^2)^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}|t|.$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminons les coordonnées du point H. Soit $M\left(1 + 2t, a, a^2 - t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - \left(a^2 - t\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow 5t - a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a^2 + 1}{5}.$$

Le point H est le point de $\mathscr{D}$ associé au paramètre $t_0 = \dfrac{a^2 + 1}{5}$. D'après la question précédente,

$$AH = \sqrt{5}\,|t_0| = \sqrt{5}\frac{a^2 + 1}{5} = \frac{a^2 + 1}{\sqrt{5}}.$$

Cette distance est minimale pour $a = 0$, auquel cas A est le point de coordonnées $(1, 0, 0)$, et la distance minimale est $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

