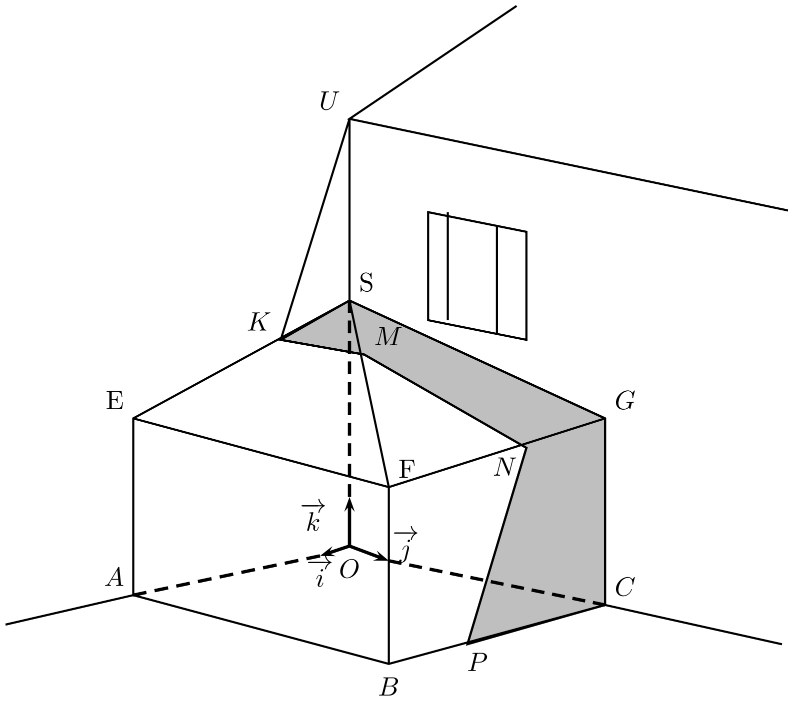
Rochambeau 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes $[UV]$ et $[EF]$ des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment $[SE]$, le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale $KMNP$ qui est la limite ombre-soleil.



1) Sans calcul, justifier que :

a) le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$;

b) le segment $[NP]$ est parallèle au segment $[UK]$.

2) Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : $A(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(4\ ;\ 5\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 5\ ;\ 0)$, $E(4\ ;\ 0\ ;\ 2,5)$, $F(4\ ;\ 5\ ;\ 2,5)$, $G(0\ ;\ 5\ ;\ 2,5)$, $S(0\ ;\ 0\ ;\ 3,5)$, $U(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $V(0\ ;\ 8\ ;\ 6)$.

On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.

a) Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse $1,2$. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2 ; 0 ; 3,2).

b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

c) Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

d) Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.

3) Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment $[SG]$ avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Les plans (UVK) et (EFK) se coupent suivant la droite (KM). La droite (UV) est une droite du plan (UVK) et la droite (EF) est une droite du plan (EFK) et les droites (UV) et (EF) sont parallèles. D'après le théorème du toit, la droite (KM) est parallèle à la droite (UV).

Donc, le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$.

b) Les plans (SOA) et (GCB) sont parallèles. Le plan (UKN) coupe ces deux plans en deux droites parallèles. Ces deux droites sont les droites (UK) et (NP) et donc les droites (UK) et (NP) sont parallèles.
Donc, le segment $[UK]$ est parallèle au segment $[NP]$.

2) a) La droite $\overrightarrow{ES}$ est la droite passant par $E(4;0;2,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{ES}(-4;0;1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (ES) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4-4t \\ y = 0 \\ z = 2,5+t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Le point K appartient à la droite (ES) et donc il existe un réel t tel que les coordonnées de K soient $(4-4t;0;2,5+t)$.

$$x_K = 1,2 \Leftrightarrow 4-4t = 1,2 \Leftrightarrow 4t = 2,8 \Leftrightarrow t = 0,7.$$

Pour $t = 0,7$, on obtient les coordonnées du point K : $(1,2;0;3,2)$.

b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UV}$ sont $(0;8;0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UK}$ sont $(1,2;0;-2,8)$.

$$\overrightarrow{UV}.\overrightarrow{n} = 0\times 7 + 8\times 0 + 0\times 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{UK}.\overrightarrow{n} = 1,2\times 7 + 0\times 0 + (-2,8)\times 3 = 8,4-8,4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UK}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (UVK). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (UVK).

Le plan (UVK) est le plan passant par $U(0;0;6)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(7;0;3)$. Une équation cartésienne du plan (UVK) est donc $7(x-0)+0(y-0)+3(z-6) = 0$ ou encore $7x+3z-18 = 0$.

c) La droite (FG) est la droite passant par $F(4;5;2,5)$ et de vecteur directeur $\dfrac{1}{4}\overrightarrow{GF}(1;0;0)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (FG) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = 5 \\ z = 2,5 \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Soit $Q(4+t;5;2,5)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (FG).

$$Q \in (UVK) \Leftrightarrow 7(4+t)+3\times 2,5-18 = 0 \Leftrightarrow 7t+17,5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{17,5}{7} \Leftrightarrow t = -2,5.$$

Quand $t = -2,5$, on obtient les coordonnées du point N : $(1,5;5;2,5)$.

d) On place le point K de (ES) d'abscisse $1,2$ et le point N de (FG) d'abscisse $1,5$. On trace la parallèle à la droite (UV) passant par K. Elle coupe la droite (SF) en M. On peut alors tracer les segments $[KM]$ et $[MN]$. Enfin, la parallèle à la droite (UK) passant par N coupe la droite (BC) en P. On peut alors tracer le segment $[NP]$.

3) Soit H le projeté orthogonal de G sur la droite (OS). H le point de coordonnées $(0;0;2,5)$. L'angle du segment $[SG]$ avec l'horizontale est l'angle $\widehat{HGS}$. On sait que

$$\tan\left(\widehat{HGS}\right) = \frac{HS}{HG} = \frac{1}{5}.$$

On en déduit que $\widehat{HGS} = 11,3^\circ$ arrondi à 10^{-1}. La condition est donc remplie.

