EXERCICE 3 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle.

Démontrer que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|a\overline{\mathrm{MA}}+b\overline{\mathrm{MB}}+c\overline{\mathrm{MC}}\right\|=k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c.

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.

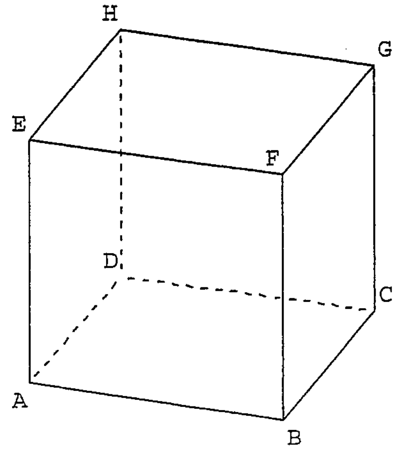
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\,;\overline{\mathrm{AB}},\overline{\mathrm{AD}},\overline{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1,0,1)$ est un vecteur normal au plan (BCE).
2. Déterminer une équation du plan (BCE).
3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).
   Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).
4. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.
5. a) Démontrer que le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs $1, -1$ et 2.

   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\|\overline{\mathrm{MR}}-\overline{\mathrm{MB}}+2\overline{\mathrm{MC}}\right\|=2\sqrt{2}$.

   c) Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

   d) Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.



EXERCICE 3

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Puisque $a+b+c \neq 0$, on peut définir G le barycentre du système $\{A(a), B(b), C(c)\}$. Pour tout point M de l'espace, on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$ et donc

$$\left\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\right\| = k \Leftrightarrow \left\|(a+b+c)\overrightarrow{MG}\right\| = k \Leftrightarrow |a+b+c| \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = k \Leftrightarrow MG = \frac{k}{|a+b+c|}$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la sphère de centre } G \text{ et de rayon } \frac{k}{|a+b+c|}.$$

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\right\| = k$ est la sphère de centre $G = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$ et de rayon $\dfrac{k}{|a+b+c|}$.

Partie B

1) Les points B, C et E ne sont pas coplanaires et donc ne sont pas alignés. Par suite, les droites (BC) et (BE) sont deux droites sécantes du plan (BCE). Ensuite, dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a $B(1,0,0)$ (car $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AE}$), $C(1,1,0)$ (car $\overrightarrow{AC} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AE}$) et $E(0,0,1)$ (car $\overrightarrow{AE} = 0.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$).
Donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(0,1,0)$ et le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(-1,0,1)$. Ensuite,

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{n} = 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{n} = (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux droites (BC) et (BE) qui sont deux droites sécantes du plan (BCE) et finalement

$$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (BCE).}$$

2) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (BCE) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \times (x-1) + 0 \times (y-0) + 1 \times (z-0) = 0 \Leftrightarrow x + z = 1.$$

$$\boxed{\text{Une équation du plan } (BCE) \text{ est } x + z = 1.}$$

3) (Δ) est la droite passant par $E(0,0,1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1,0,1)$. Donc,

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de } (\Delta) \text{ est donc } \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = t+1 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

4) On sait qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$ (premier plan de coordonnées).
Soit $M(t, 0, t+1)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (Δ).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Pour $t = -1$, on obtient le point R de coordonnées $(-1,0,0)$.

Les coordonnées du milieu du segment $[RB]$ sont $\left(\dfrac{x_R + x_B}{2}, \dfrac{y_R + y_B}{2}, \dfrac{z_R + z_B}{2}\right)$ ou encore $(0,0,0)$. Le milieu du segment $[BR]$ est donc le point A ou encore

$$\boxed{\text{le point } R \text{ est le symétrique du point } B \text{ par rapport au point } A.}$$

5) a) Soit $D' = \text{bar}(R(1), B(-1), C(2))$. On a $R(-1,0,0)$, $B(1,0,0)$ et $C(1,1,0)$. Donc

- $x_{D'} = \dfrac{x_R - x_B + 2x_C}{1-1+2} = \dfrac{-1-1+2}{2} = 0.$
- $y_{D'} = \dfrac{y_R - y_B + 2y_C}{1-1+2} = \dfrac{0-0+2}{2} = 1.$
- $z_{D'} = \dfrac{z_R - z_B + 2z_C}{1-1+2} = \dfrac{0-0+0}{2} = 0.$

Le point D' a pour coordonnées $(0,1,0)$ ou encore $D' = D$. Donc

$$\boxed{D = \text{bar}\{R(1), B(-1), C(2)\}.}$$

b) D'après la partie A, (S) est la sphère de centre D et de rayon $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{|1-1+2|} = \sqrt{2}$.

c) Le triangle ABD est rectangle en A. D'après le théorème de PYTHAGORE, $DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc $B \in (S)$.
Le triangle ADE est rectangle en A. D'après le théorème de PYTHAGORE, $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc $E \in (S)$.
Le triangle DCG est rectangle en C. D'après le théorème de PYTHAGORE, $DG = \sqrt{CD^2 + CG^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Donc $G \in (S)$.

d) On sait que l'intersection d'une sphère et d'un plan est soit vide, soit un point, soit un cercle (de rayon strictement positif). Ici, le plan (BCE) et la sphère (S) ont en commun les deux points distincts B et E. Donc $(S) \cap (BCE)$ est un cercle.

La distance du centre $D(0, 1, 0)$ de la sphère (S) au plan (BCE) d'équation $x + z - 1 = 0$ est

$$d = \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si on note r le rayon du cercle $(S) \cap (BCE)$ et R le rayon de la sphère (S), le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\boxed{(S) \cap (BCE) \text{ est un cercle de rayon } \sqrt{\frac{3}{2}}.}$$