EXERCICE 2 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère :

- les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations :

$$\mathscr{P} \ : \ x - y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{P}' \ : \ x + y + 3z = 0.$$

- la droite $\mathscr{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1
La droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 2
La sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 3
L'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{array}\right. , t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4
Les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 2

Proposition 1.	**VRAI**
Proposition 2.	**FAUX**
Proposition 3.	**VRAI**
Proposition 4.	**VRAI**

Justification 1 Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(-2, 2, 2)$. Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1, -1, -1)$. On remarque que $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{n}$ et en particulier $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. On en déduit que la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. La proposition 1 est vraie.

Justification 2 La distance du centre O de la sphère $\mathscr{S}$ au plan $\mathscr{P}$ est

$$d = \frac{|0 - 0 - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

La distance d n'est pas égale au rayon de la sphère $\mathscr{S}$ et donc la sphère $\mathscr{S}$ n'est pas tangente au plan $\mathscr{P}$. La proposition 2 est fausse.

Justification 3 Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est le vecteur $\overrightarrow{n}'$ de coordonnées $(1, 1, 3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{n}' = k\overrightarrow{n}$ alors $k = 1$ et aussi $k = -1$ ce qui est impossible.
On en déduit que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles et donc que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en une droite Δ.

Notons Δ' la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}$.

Pour tout réel t',

$$(1 - t') - (-1 - 2t') - (t') - 2 = 0 \text{ et } (1 - t') + (-1 - 2t') + 3(t') = 0.$$

Donc tout point de la droite Δ' appartient au plan $\mathscr{P}$ et au plan $\mathscr{P}'$ ou encore la droite Δ' est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ et dans le plan $\mathscr{P}'$. Finalement, Δ' est la droite Δ d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ou encore un système d'équations paramétriques de Δ est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}$. La proposition 3 est vraie.

Justification 4 Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\overrightarrow{u}'$ de coordonnées $(-1, -2, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires et donc les droites $\mathscr{D}$ et Δ ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont sécantes ou non coplanaires.

Déterminons alors l'intersection de $\mathscr{D}$ et Δ. Soient $M(-3 - 2t, 2t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$ et $M'(1 - t', -1 - 2t', t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3 - 2t = 1 - t' \\ 2t = -1 - 2t' \\ 1 + 2t = t' \ (*) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 1 + 2t \ (*) \\ -3 - 2t = 1 - (1 + 2t) \\ 2t = -1 - 2(1 + 2t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = 1 + 2t \\ -3 = 0 \\ 2t = -1 - 2(1 + 2t) \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution et donc $\mathscr{D}$ et Δ n'ont aucun point commun. Finalement, les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont non coplanaires. La proposition 4 est vraie.

