EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'**ANNEXE, page 6 sur 6, à rendre avec la copie**.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[BF]$ et $[HF]$.

1) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\ ;1\ ;1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et à $\overrightarrow{IJ}$.

En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.

3) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

b) En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

c) Placer le point R sur la figure.

4) Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). *On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.*

5) a) Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

b) Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre G passant par F.

Justifier que la sphère $\mathcal{S}$ et le plan (IJK) sont sécants.

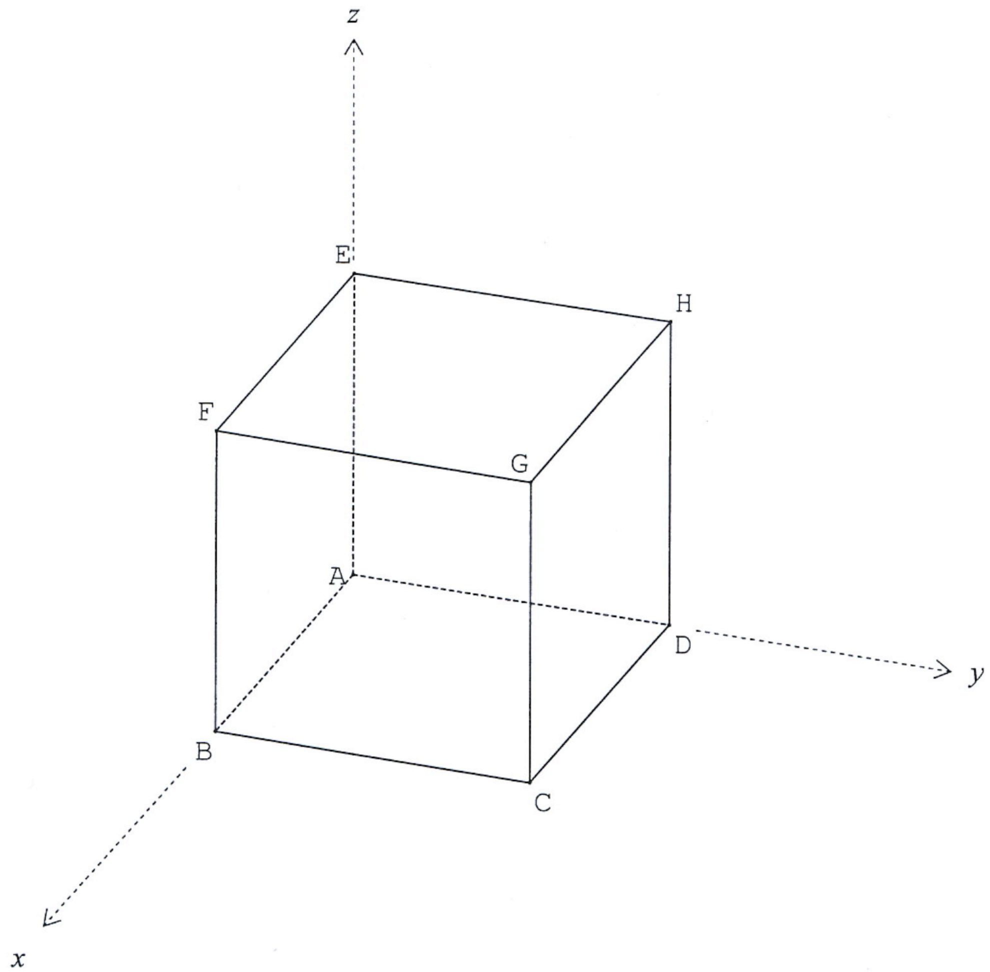
Déterminer le rayon de leur intersection.

ANNEXE

EXERCICE 3

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie.



EXERCICE 3

1) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Ensuite, puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AD}$, le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$.
Puisque $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et Puisque $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$.

Le point I milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}, \dfrac{y_B + y_C}{2}, \dfrac{z_B + z_C}{2}\right)$ ou encore $\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$. De même, le point J milieu de [BF] a pour coordonnées $\left(1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ et le point K milieu de [HF] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$.

$$\boxed{I\left(1, \frac{1}{2}, 0\right),\ J\left(1, 0, \frac{1}{2}\right) \text{ et } K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).}$$

2) Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $(x_K - x_I, y_K - y_I, z_K - z_I)$ ou encore $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, 1\right)$. De même, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IK} = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ} = 2 \times 0 + 1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$. Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK). Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc un vecteur normal au plan (IJK).

Le plan (IJK) est le plan passant par $I\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, 1, 1)$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc $2 \times (x - 1) + 1 \times \left(y - \dfrac{1}{2}\right) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $2x + y + z - \dfrac{5}{2} = 0$ ou enfin

$$\boxed{\text{une équation du plan (IJK) est } 4x + 2y + 2z - 5 = 0.}$$

3) a) La droite (CD) est la droite passant par le point $D(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC}(1, 0, 0)$. Donc

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est } \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Soit $M(t, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CD).

$$M \in (IJK) \Leftrightarrow 4t + 2 + 0 - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4}.$$

Quand $t = \dfrac{3}{4}$, on obtient le point $R\left(\dfrac{3}{4}, 1, 0\right)$.

$$\boxed{\text{Le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point } R\left(\frac{3}{4}, 1, 0\right).}$$

c) Voir figure page suivante.

4) Les plans (ABD) et (EFH) sont parallèles. Le plan (IKR) est sécant au plan (ABD) selon la droite (IR). On sait alors que le plan (IKR) coupe le plan (EFH) en une droite parallèle à la droite (IR).
Puisque le point K est commun aux plans (EFH) et (IKR), l'intersection de ces deux plans est la parallèle à la droite (IR) passant par K. Cette droite coupe les arêtes (EF) et (GH) en deux points M et N. La section du cube par le plan (IJK) est le polygone IRNMJ.

Voir figure page suivante.

5) a) Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le plan (IJK) a pour équation $4x + 2y + 2z - 5 = 0$. Donc

$$d(G, (IJK)) = \frac{|4 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 6} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\boxed{d(G, (IJK)) = \frac{\sqrt{6}}{4}.}$$

b) Le rayon ρ de la sphère $\mathscr{S}$ est

$$\rho = GF = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2} = 1.$$

D'après la question a), la distance d du centre G de $\mathscr{S}$ au plan (IJK) est $d = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. Par suite, $d < \rho$ et on sait alors que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants en un cercle. De plus, si on note r le rayon de ce cercle, le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que $\rho^2 = r^2 + d^2$ et donc que

$$r = \sqrt{\rho^2 - d^2} = \sqrt{1 - \frac{6}{16}} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Le rayon du cercle intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et du plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.