

Exercice 2 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x) dx \geq 0$.
- Pour tous réels α et β , $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)] dx = \alpha \int_a^b u(x) dx + \beta \int_a^b v(x) dx$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \end{cases}$$

- a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.
 - b. En déduire que $\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$.
2. Calculer u_1 .
- a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n$.
 - b. Étudier les variations de la suite (u_n) .
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 - b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2

PARTIE A : Restitution organisée de connaissances

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ telles que pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

Alors, pour tout réel x de $[a, b]$, $g(x) - f(x) \geq 0$ puis par positivité de l'intégrale, $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$ et enfin, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$. On a ainsi montré que $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

PARTIE B

1) a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, on a $-1 \leq -x^2 \leq 0$. Par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} , on en déduit que pour tout réel x de $[0, 1]$, $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq e^0$ et finalement

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } [0, 1], \frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1.$$

b) L'inégalité de la moyenne permet alors d'affirmer que $\frac{1}{e} \times (1 - 0) \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1 \times (1 - 0)$ et donc que

$$\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1.$$

2) Pour tout réel x de $[0, 1]$, $xe^{-x^2} = -\frac{1}{2}(-2x)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}(e^{-x^2})'$ et donc

$$u_1 = \int_0^1 xe^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right).$$

3) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $x^n f(x) \geq 0$. On en déduit que $\int_0^1 x^n f(x) dx \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n \geq 0.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx = \int_0^1 (x^{n+1} e^{-x^2} - x^n e^{-x^2}) dx = \int_0^1 x^n (x - 1) e^{-x^2} dx.$$

Maintenant, pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n \geq 0$, $e^{-x^2} \geq 0$ et $(x - 1) \leq 0$ et donc $x^n (x - 1) e^{-x^2} \leq 0$. On en déduit par croissance de l'intégrale que $u_{n+1} - u_n \leq \int_0^1 0 dx = 0$. Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$ et donc

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $e^{-x^2} \leq e^0 = 1$ et donc, puisque $x^n \geq 0$, pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n e^{-x^2} \leq x^n$. On en déduit par croissance de l'intégrale que

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

b) Pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$