## Exercice 2 (5 points)

### Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, $\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et si, pour tout $x$ de $[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

### Partie B

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite $(u_n)$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0,1]$, $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

   **b.** En déduire que $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant u_0\leqslant 1$.
2. Calculer $u_1$.
3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $0\leqslant u_n$.

   **b.** Étudier les variations de la suite $(u_n)$.

   **c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n\leqslant \frac{1}{n+1}$.

   **b.** En déduire la limite de la suite $(u_n)$.