

EXERCICE 2 (5 points)

(Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité 1 cm.

1. Restitution organisée de connaissances

Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega M' = \Omega M \quad (1) \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M}') = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) \quad (2) \end{array} \right.$$

a) Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω .

Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

b) En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω .

2. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

3. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2i$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

a) Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b) Faire une figure et placer les points A et B .

c) Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $c = -8i$ et D son image par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Placer les points C et D .

Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4i$.

5. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

6. Montrer que OAD est un triangle rectangle.

EXERCICE 2

1. Restitution organisée de connaissances

a) Soit M un point du plan distinct de Ω . L'égalité (1) montre que M' est distinct de Ω puis que $\left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = \frac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$.
D'autre part, l'égalité fournit $\arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi]$.

b) Soit M un point du plan distinct de Ω . La question précédente montre que $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ . Par suite, $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$ ou encore $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou enfin $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$. Cette dernière égalité reste vraie quand $z = \omega$ car dans ce cas $z' = z = \omega$. Finalement

$$\text{pour tout nombre complexe } z, z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega).$$

2. On note (E) l'équation proposée. Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 16 = 3 \times 16 - 4 \times 16 = -16 = (4i)^2.$$

L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{2} = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i$.

$$\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \text{ sont } z_1 = 2\sqrt{3} - 2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3} + 2i.$$

3. a) $|a| = |2\sqrt{3} - 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ puis

$$a = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

puis $b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$a = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

b) Voir figure à la fin de l'exercice.

c) On a déjà $OA = |a| = 4$ et $OB = |b| = 4$. Ensuite, $AB = |b - a| = |4i| = 4$. Donc $OA = OB = AB$ et

$$\text{le triangle } OAB \text{ est équilatéral.}$$

4. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)z$. Donc

$$z_D = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-8i) = 4i + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 4i.$$

5. En particulier, $z_D = 2z_B$ et donc

$$D \text{ est l'image de } B \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport } 2.$$

6. $BD = \frac{1}{2}OD = OB$ et donc $BD = BO = BA$. Par suite, le point A est sur le cercle de diamètre $[OD]$ (et B est le centre de ce cercle). On sait alors que

le triangle OAD est rectangle en A .

