EXERCICE 2

1. Restitution organisée de connaissances

a) Soit M un point du plan distinct de Ω. L'égalité (1) montre que M' est distinct de Ω puis que $\left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$.
D'autre part, l'égalité fournit $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta\ [2\pi]$.

b) Soit M un point du plan distinct de Ω. La question précédente montre que $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ. Par suite, $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ ou encore $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ ou enfin $z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$. Cette dernière égalité reste vraie quand $z = \omega$ car dans ce cas $z' = z = \omega$. Finalement

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z,\ z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega).}$$

2. On note (E) l'équation proposée. Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 16 = 3 \times 16 - 4 \times 16 = -16 = (4i)^2.$$

L'équation (E) admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{4\sqrt{3}-4i}{2} = 2\sqrt{3}-2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3}+2i$.

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0 \text{ sont } z_1 = 2\sqrt{3}-2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3}+2i.}$$

3. a) $|a| = |2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ puis

$$a = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

puis $b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$\boxed{a = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = \overline{a} = 4e^{i\frac{\pi}{6}}.}$$

b) Voir figure à la fin de l'exercice.

c) On a déjà $OA = |a| = 4$ et $OB = |b| = 4$. Ensuite, $AB = |b-a| = |4i| = 4$. Donc $OA = OB = AB$ et

$$\boxed{\text{le triangle } OAB \text{ est équilatéral.}}$$

4. L'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Donc

$$z_D = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-8i) = 4i + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + 4i.$$

5. En particulier, $z_D = 2z_B$ et donc

$$\boxed{D \text{ est l'image de } B \text{ par l'homothétie de centre } O \text{ et de rapport 2.}}$$

6. $\mathrm{BD} = \frac{1}{2}\mathrm{OD} = \mathrm{OB}$ et donc $\mathrm{BD} = \mathrm{BO} = \mathrm{BA}$. Par suite, le point A est sur le cercle de diamètre [OD] (et B est le centre de ce cercle). On sait alors que

$$\boxed{\text{le triangle OAD est rectangle en A.}}$$