EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances.

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2) Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ? Justifier les réponses.

a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b) $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;

c) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3) On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier naturel n non nul par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$.

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?

EXERCICE 2

1) Restitution organisée de connaissances.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
D'après la propriété 1, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$. D'autre part, puisque la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n, on a $v_n \leqslant v_0$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0. La suite (u_n) est donc convergente d'après la propriété 2.
De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 et donc la suite (v_n) est convergente.

Posons alors $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$. On a

$$\ell - \ell' = \lim_{n \to +\infty} u_n - \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0,$$

et donc $\ell = \ell'$. On a montré que

$$\boxed{\text{deux suites adjacentes convergent et ont même limite.}}$$

2) a) Pour tout entier naturel n, $10^{-n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n$. La suite $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{10}$. Puisque $0 \leqslant \frac{1}{10} < 1$, on sait que la suite $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle.

On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite quand n tend vers $+\infty$, à savoir 1. On en déduit aussi que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante et donc que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$. Ainsi, les deux suites (u_n) et (v_n) ont même limite. Néanmoins, les deux suites (u_n) et (v_n) sont divergentes et donc les deux suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être adjacentes.

c) Pour tout entier naturel non nul n, $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et donc la suite (u_n) est strictement croissante. D'autre part, si n est impair, alors $n+1$ est pair et

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

et donc, si n est impair, $v_{n+1} - v_n > 0$. Ainsi, la suite (v_n) n'est pas décroissante et donc les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas adjacentes.

3) La suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. Soit alors a un réel positif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
0 < n \leqslant n+1 &\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < a + \frac{1}{n+1} \leqslant a + \frac{1}{n} \\
&\Rightarrow \ln\left(a + \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \ln\left(a + \frac{1}{n}\right) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Rightarrow v_{n+1} \leqslant v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout choix de a, la suite (v_n) est décroissante. Donc, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Or, si $a = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty \neq 1$ et si $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ln(a)$. Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si $\ln(a) = 1$ ou encore $a = e$.

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes si et seulement si } a = e.}$$

