EXERCICE 2

1) Restitution organisée de connaissances.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
D'après la propriété 1, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$. D'autre part, puisque la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n, on a $v_n \leqslant v_0$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0. La suite (u_n) est donc convergente d'après la propriété 2.
De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 et donc la suite (v_n) est convergente.

Posons alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. On a

$$\ell - \ell' = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0,$$

et donc $\ell = \ell'$. On a montré que

$$\boxed{\text{deux suites adjacentes convergent et ont même limite.}}$$

2) a) Pour tout entier naturel n, $10^{-n} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$. La suite $\left(\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{10}$. Puisque $0 \leqslant \dfrac{1}{10} < 1$, on sait que la suite $\left(\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle.

On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite quand n tend vers $+\infty$, à savoir 1. On en déduit aussi que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante et donc que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Ainsi, les deux suites (u_n) et (v_n) ont même limite. Néanmoins, les deux suites (u_n) et (v_n) sont divergentes et donc les deux suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être adjacentes.

c) Pour tout entier naturel non nul n, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et donc la suite (u_n) est strictement croissante. D'autre part, si n est impair, alors $n+1$ est pair et

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

et donc, si n est impair, $v_{n+1} - v_n > 0$. Ainsi, la suite (v_n) n'est pas décroissante et donc les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas adjacentes.

3) La suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Soit alors a un réel positif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
0 < n \leqslant n+1 &\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < a + \frac{1}{n+1} \leqslant a + \frac{1}{n}\\
&\Rightarrow \ln\left(a + \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \ln\left(a + \frac{1}{n}\right) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0,+\infty[)\\
&\Rightarrow v_{n+1} \leqslant v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout choix de a, la suite (v_n) est décroissante. Donc, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Or, si $a = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty \neq 1$ et si $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(a)$. Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si $\ln(a) = 1$ ou encore $a = e$.

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes si et seulement si } a = e.}$$

