

EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Restitution organisée de connaissances.

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors, pour tout entier naturel n , $v_n \geq u_n$.

Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2) Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ?

Justifier les réponses.

a) $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

b) $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \frac{1}{n}$;

c) $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

3) On considère un nombre réel a positif et les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout nombre entier

naturel n non nul par : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln\left(a + \frac{1}{n}\right)$.

Existe-t-il une valeur de a telle que les suites soient adjacentes ?