

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

Prérequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels.

On note \bar{z} , le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - bi$.

Questions

a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' , $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

Partie B

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et \bar{z} sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.
 - a) Écrire le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.
 - b) Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Dédurre des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

Partie C

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, z_B = -1 + i, z_C = -1 - i \text{ et } z_D = 1 - i.$$

Soit r la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

On appelle E l'image du point B par r et F celle du point D par r .

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation r .
2. a) Démontrer que l'affixe du point E, notée z_E , est égale à $-1 + \sqrt{3}$.
b) Déterminer l'affixe z_F du point F.
c) Démontrer que le quotient $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.
d) Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances

a) Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels puis $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned}\bar{z} \times \overline{z'} &= (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = \overline{(aa' - bb') + i(ab' + ba')} \\ &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{z \times z'}.\end{aligned}$$

Pour tous nombres complexes z et z' , $\bar{z} \times \overline{z'} = \overline{z \times z'}$.

b) Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

- C'est vrai pour $n = 1$ car $\overline{z^1} = \bar{z} = (\bar{z})^1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \bar{z} \text{ (d'après a)} \\ &= (\bar{z})^n \times \bar{z} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\bar{z})^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

Partie B

1. Soit z un nombre complexe. Puisque $(-z)^4 = z^4$, $z^4 = -4 \Rightarrow (-z)^4 = -4$. D'autre part, puisque -4 est un nombre réel, $z^4 = -4 \Rightarrow \overline{z^4} = \overline{-4} \Rightarrow (\bar{z})^4 = -4$. On a montré que

si z est solution de (E) alors $-z$ et \bar{z} sont solutions de (E).

2. a) $z_0 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

b) $z_0^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi} = 4(-1 + 0i) = -4$. Donc z_0 est solution de l'équation (E).

3. L'équation (E) admet $z_0 = 1 + i$ pour solution. mais alors, d'après la question 1, l'équation (E) admet aussi pour solution $-z_0 = -1 - i$, $\bar{z}_0 = 1 - i$ et $-\bar{z}_0 = -1 + i$.

L'équation (E) admet pour solutions $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$ et $-1 - i$.

Partie C

1. L'expression complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$. Donc l'expression complexe de la rotation r est

$$\begin{aligned}z' &= -1 - i + \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) (z + 1 + i) = -1 - i + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(z + 1 + i) \\&= \frac{1}{2}(-2 - 2i) + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(1 + i) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(-2 - 2i + 1 + \sqrt{3} - i\sqrt{3} + i) \\&= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}))\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}z_E &= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z_B + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(-1 + i) + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) \\&= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - 1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = -1 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$z_E = -1 + \sqrt{3}.$$

b)

$$\begin{aligned}z_F &= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z_D + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(1 - i) + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) \\&= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} - i\sqrt{3} - i - 1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = -i(1 + \sqrt{3}).\end{aligned}$$

$$z_F = -i(1 + \sqrt{3}).$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} &= \frac{1 + i - (-1 + \sqrt{3})}{1 + i + i(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + i(2 + \sqrt{3})} = (2 - \sqrt{3}) \frac{1 + \frac{i}{2 - \sqrt{3}}}{1 + i(2 + \sqrt{3})} \\&= (2 - \sqrt{3}) \frac{1 + i(2 + \sqrt{3})}{1 + i(2 + \sqrt{3})} \quad (\text{car } (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1) \\&= 2 - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

En particulier, $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d) Un réel non nul admet pour argument 0 ou π modulo 2π et donc

$$\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA} \right) = \arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} \right) = 0 \text{ } [\pi].$$

On en déduit que

les points A, E et F sont alignés.