BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances

a) Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels puis $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned}\overline{z} \times \overline{z'} &= (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = \overline{((aa' - bb') + i(ab' + ba'))} \\ &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{z \times z'}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous nombres complexes } z \text{ et } z',\ \overline{z} \times \overline{z'} = \overline{z \times z'}.}$$

b) Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

• C'est vrai pour $n = 1$ car $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \text{ (d'après a))} \\ &= (\overline{z})^n \times \overline{z} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\overline{z})^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z \text{ et tout entier naturel non nul } n,\ \overline{z^n} = (\overline{z})^n.}$$

Partie B

1. Soit z un nombre complexe. Puisque $(-z)^4 = z^4$, $z^4 = -4 \Rightarrow (-z)^4 = -4$. D'autre part, puisque -4 est un nombre réel, $z^4 = -4 \Rightarrow \overline{z^4} = \overline{-4} \Rightarrow (\overline{z})^4 = -4$. On a montré que

$$\boxed{\text{si } z \text{ est solution de } (E) \text{ alors } -z \text{ et } \overline{z} \text{ sont solutions de } (E).}$$

2. a) $z_0 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$$\boxed{z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.}$$

b) $z_0^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi} = 4(-1 + 0i) = -4$. Donc z_0 est solution de l'équation (E).

3. L'équation (E) admet $z_0 = 1 + i$ pour solution. mais alors, d'après la question 1, l'équation (E) admet aussi pour solution $-z_0 = -1 - i$, $\overline{z_0} = 1 - i$ et $-\overline{z_0} = -1 + i$.

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet pour solutions } 1 + i,\ 1 - i,\ -1 + i \text{ et } -1 - i.}$$

Partie C

1. L'expression complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$. Donc l'expression complexe de la rotation r est

$$\begin{aligned}
z' &= -1 - i + \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)(z + 1 + i) = -1 - i + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(z + 1 + i) \\
&= \frac{1}{2}(-2 - 2i) + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(1 + i) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(-2 - 2i + 1 + \sqrt{3} - i\sqrt{3} + i) \\
&= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3}))
\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}
z_E &= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z_B + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(-1 + i) + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} + i\sqrt{3} + i - 1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = -1 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_E = -1 + \sqrt{3}.}$$

b)

$$\begin{aligned}
z_F &= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z_D + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(1 - i) + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3} - i\sqrt{3} - i - 1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})) = -i(1 + \sqrt{3}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_F = -i(1 + \sqrt{3}).}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} &= \frac{1 + i - (-1 + \sqrt{3})}{1 + i + i(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + i(2 + \sqrt{3})} = (2 - \sqrt{3})\frac{1 + \dfrac{i}{2 - \sqrt{3}}}{1 + i(2 + \sqrt{3})} \\
&= (2 - \sqrt{3})\frac{1 + i(2 + \sqrt{3})}{1 + i(2 + \sqrt{3})} \text{ (car } (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1) \\
&= 2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

En particulier, $\dfrac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

d) Un réel non nul admet pour argument 0 ou π modulo 2π et donc

$$\left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{EA}\right) = \arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = 0\ [\pi].$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{les points } A, E \text{ et } F \text{ sont alignés.}}$$

