Exercice 1 (6 *points*)

Commun à tous les candidats

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$.
On suppose connus les résultats suivants :

- $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a.* Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_1 sur $[0,+\infty[$.
   c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   (Pour le calcul de I_1, on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)

2. *a.* Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
   b. Étudier les variations de la suite (I_n).
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.
   a. Étudier le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de g sur $[0,+\infty[$.
   Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a
   $$\ln(1+x^n) \leqslant x^n.$$
   c. En déduire la limite de la suite (I_n).

BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Pondichery

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ telles que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Alors, pour tout réel t de $[a, b]$, $g(t) - f(t) \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_a^b (g(t) - f(t))\ dt \geqslant 0$ puis par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$ et donc que $\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$.

Partie B

1. a. $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = \lim_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty.}$$

b. 1ère solution. La fonction $x \mapsto 1 + x$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \ln(y)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc la fonction $f_1 : x \mapsto \ln(1 + x)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2ème solution. Pour tout réel x de $[0, +\infty[$, on a $1 + x > 0$. Donc, la fonction f_1 est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x} > 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

c. 1ère solution. Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v(x) = x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln(1+x) & v(x) = x \\ u'(x) = \dfrac{1}{1+x} & v'(x) = 1 \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_1(x)\ dx &= \int_0^1 1 \times \ln(x+1)\ dx = [x\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 x \times \frac{1}{x+1}\ dx = \ln 2 - 0 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \ln 2 - [x - \ln(x+1)]_0^1 = \ln 2 - (1 - \ln 2 - 0) = 2\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

2ème solution. Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = \ln(1 + x)$ et $v(x) = x + 1$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$ on a

$$u(x) = \ln(1+x) \qquad v(x) = x+1$$
$$u'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad v'(x) = 1$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 1 \times \ln(1+x)\,dx = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 (x+1) \times \frac{1}{x+1}\,dx = 2\ln 2 - 0 - \int_0^1 1\,dx \\ &= 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 2\ln 2 - 1.}$$

Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $x+1 \geqslant 1$ et donc $f_1(x) = \ln(x+1) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f_1 est continue et positive sur $[0, 1]$. On sait alors que le nombre I_1 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe C_1.

2. a. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout x de $[0, 1]$, on a $1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$ et donc $0 \leqslant \ln(1 + x^n) \leqslant \ln 2$ par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$.

Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 \ln 2\,dx$ avec $\int_0^1 \ln 2\,dx = (1-0)\times\ln 2 = \ln 2$.

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2.}$$

b. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, on a $x \leqslant 1$ puis $x^{n+1} \leqslant x^n$ après multiplication des deux membres de l'inégalité par le réel positif x^n.

Par suite, pour tout réel x de $[0, 1]$, $1 + x^{n+1} \leqslant 1 + x^n$ puis $\ln(1 + x^{n+1}) \leqslant \ln(1 + x^n)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 \ln(1 + x^{n+1})\,dx \leqslant \int_0^1 \ln(1 + x^n)\,dx$ et donc que $I_{n+1} \leqslant I_n$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

c. La suite (I_n) est décroissante d'après b) et minorée par 0 d'après a). Donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est convergente.}}$$

3. a. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1} \leqslant 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est décroissante sur } [0, +\infty[.}$$

b. La fonction g est décroissante sur $[0, +\infty[$. Par suite, pour tout $x \geqslant 0$, on a $g(x) \leqslant g(0)$ ou encore $g(x) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est négative sur } [0, +\infty[.}$$

On en déduit que pour tout réel t de $[0, +\infty[$, $\ln(1 + t) - t \leqslant 0$ ou encore $\ln(1 + t) \leqslant t$. Soient alors n un entier naturel non nul et x un réel positif. Le réel $t = x^n$ est encore un réel positif et d'après ce qui précède, on a $\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n \text{ et tout réel positif } x,\ \ln(1 + x^n) \leqslant x^n.}$$

c. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

