Exercice 1 (6 *points*)

Commun à tous les candidats

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$.
On suppose connus les résultats suivants :

- $\int_a^b \left(f(t)+g(t)\right)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\mathrm{d}x$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. *a.* Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_1 sur $[0,+\infty[$.
   c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   (Pour le calcul de I_1, on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)

2. *a.* Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
   b. Étudier les variations de la suite (I_n).
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.
   a. Étudier le sens de variation de g sur $[0,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de g sur $[0,+\infty[$.
   Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a
   $$\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n.$$
   c. En déduire la limite de la suite (I_n).