

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par \mathcal{P} le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan \mathcal{P} .

On suppose connue la propriété suivante.

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathcal{P})$ du point M_0 au plan \mathcal{P} , c'est-à-dire la distance M_0H , est telle que

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H}| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4, 1, 5), (-3, 2, 0), (1, 3, 6), (-7, 0, 4)$.

1.
 - a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan \mathcal{P} et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2y - z - 1 = 0$.
 - b. Déterminer la distance d du point F au plan \mathcal{P} .
2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - b. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point F sur le plan \mathcal{P} .
 - c. Retrouver le résultat de la question 1. b.
3. Soit \mathcal{S} la sphère de centre F et de rayon 6.
 - a. Justifier que le point B appartient à la sphère \mathcal{S} .
 - b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle \mathcal{C} , intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan \mathcal{P} .

EXERCICE 4

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1) Puisque H est le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan \mathcal{P} et que \vec{n} est un vecteur normal à \mathcal{P} , les vecteurs $\overrightarrow{M_0H}$ et \vec{n} sont colinéaires. Par suite,

$$\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} \right| = \|\vec{n}\| \left\| \overrightarrow{M_0H} \right\| = M_0H \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2) Puisque le point H appartient au plan \mathcal{P} , on a $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$ et donc $ax_H + by_H + cz_H = -d$ puis

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0H} &= a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0) + c(z_H - z_0) = -ax_0 - by_0 - cz_0 + ax_H + by_H + cz_H \\ &= -ax_0 - by_0 - cz_0 - d. \end{aligned}$$

3) D'après les deux questions précédentes, $|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d| = d(M_0, \mathcal{P}) \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ et, puisque

$$|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d| = |-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|,$$

on a montré que

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Partie B

1) a) Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $(-7, 1, -5)$ et les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AC} sont $(-3, 2, 1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, on a d'une part $-3 = -7k$ et donc $k = \frac{3}{7}$ et d'autre part, $2 = 1 \times k$ et donc $k = 2$. Ceci est impossible et donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires. Par suite, les points A, B et C définissent un plan \mathcal{P} .

On note \mathcal{P}' le plan d'équation $x + 2y - z - 1 = 0$.

- $x_A + 2y_A - z_A - 1 = 4 + 2 - 5 - 1 = 0$. Donc A appartient à \mathcal{P}' .
- $x_B + 2y_B - z_B - 1 = -3 + 4 - 0 - 1 = 0$. Donc B appartient à \mathcal{P}' .
- $x_C + 2y_C - z_C - 1 = 1 + 6 - 6 - 1 = 0$. Donc C appartient à \mathcal{P}' .

On en déduit que le plan (ABC) est le plan \mathcal{P}' ou encore qu'une équation cartésienne de \mathcal{P} est $x + 2y - z - 1 = 0$.

$$b) d = \frac{|x_F + 2y_F - z_F - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-7 + 0 - 4 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

$$d = 2\sqrt{6}.$$

2) a) Δ est la droite passant par $F(-7, 0, 4)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(1, 2, -1)$. Donc, une représentation paramétrique de Δ est

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Le point H est l'intersection de Δ et de \mathcal{P} . Soit $M(-7 + t, 2t, 4 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ .

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (-7 + t) + 2(2t) - (4 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Pour $t = 2$, on obtient les coordonnées du point H : $(-5, 4, 2)$.

$$\text{Le point H a pour coordonnées } (-5, 4, 2).$$

c) $d(F, \mathcal{P}) = FH = \sqrt{(-5 - (-7))^2 + (4 - 0)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. On retrouve ainsi le résultat de la question 2)b).

3) a) $FB^2 = (x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2 + (z_B - z_F)^2 = (-3 - (-7))^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 4)^2 = 16 + 4 + 16 = 36$ et donc $FB = 6$.

Le point B appartient à \mathcal{S} .

b) On note R le rayon de \mathcal{S} (donc $R = 6$). Puisque $d = 2\sqrt{6} = 4,8\dots$, on a $d < R$ et on sait que l'intersection de \mathcal{S} et de \mathcal{P} est un cercle \mathcal{C} de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{36 - 24} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Le centre de \mathcal{C} est le projeté orthogonal du centre F de la sphère \mathcal{S} sur le plan \mathcal{P} . C'est le point $H(-5, 4, 2)$ déterminé à la question 2)b).

\mathcal{C} est un cercle de rayon $2\sqrt{3}$ et de centre $H(-5, 4, 2)$.